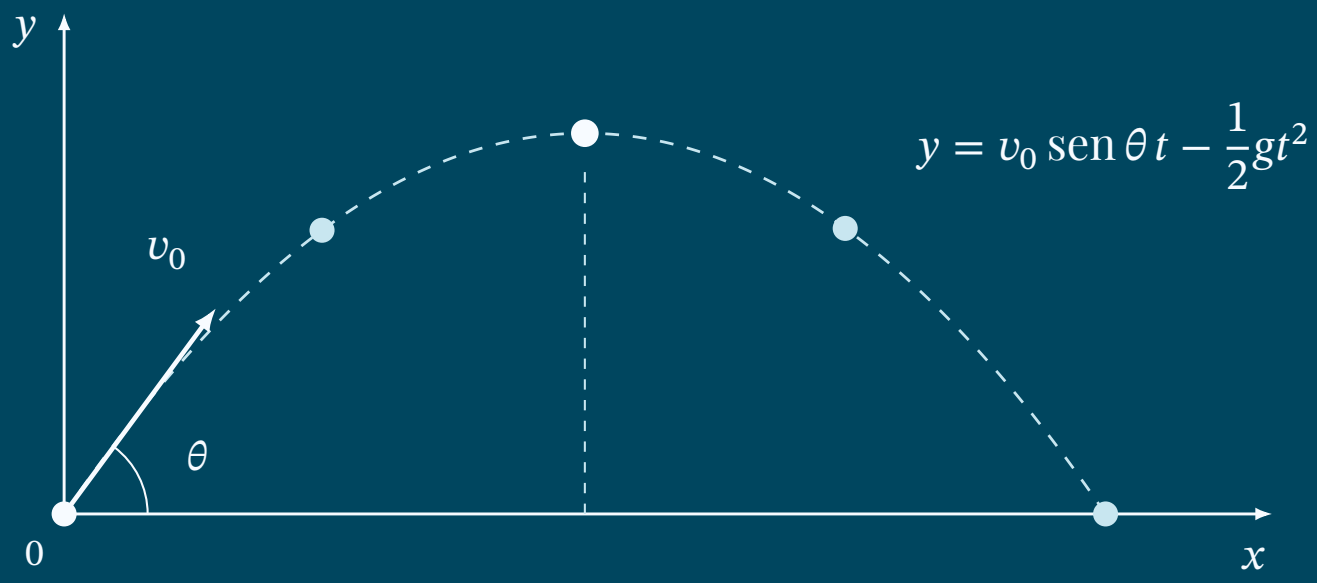
NÍVEL MÉDIO

Física Interativa

PARA CONCURSOS

COMO RESOLVER PROBLEMAS DE FÍSICA



C → O → R → A

COMPREENDER · ORGANIZAR · RESOLVER · AVALIAR

Paulo Vicente Moreira

1ª edição
2026

Física Interativa para Concursos

Nível Médio – Banca Cesgranrio

Autor: Paulo Vicente Moreira

Edição e Diagramação: Jakeline Moreira Damasceno

1ª Edição
Outubro de 2026
Versão 2026-10-16

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Moreira, Paulo Vicente
Física Interativa para Concursos: Nível Médio – Banca Cesgranrio / Paulo Vicente Moreira. – 1. ed. – Salvador: PV Cursos, 2026.
Edição digital (e-book).

1. Física. 2. Concursos públicos. 3. Cesgranrio. I. Título.

Aviso Legal

Este livro foi escrito para quem estuda Física para concursos públicos de nível médio. As questões reproduzidas nas caixas "Caiu na Petrobras" são de provas aplicadas pela Fundação Cesgranrio e aparecem aqui com a indicação de empresa, cargo e ano, para fins didáticos; os gabaritos e as resoluções são do autor. As simulações, animações e resoluções interativas alcançadas pelos códigos QR ficam em sites do autor e podem mudar de endereço ou de conteúdo sem aviso.

© 2026 PV Cursos e Concursos. Texto, figuras e resoluções de Paulo Vicente Moreira. Esta edição digital é distribuída de graça em fisicainterativa.com/concursos, pelos vinte anos do Projeto Física Interativa, sob a licença Creative Commons Atribuição, Não Comercial, Sem Derivações 4.0 (CC BY-NC-ND). Em palavras simples: você pode baixar, ler, imprimir, copiar e repassar este arquivo, inteiro e sem alteração, a quem quiser e por qualquer meio, desde que o nome do autor e esta página fiquem nele. Não pode vendê-lo, cobrar pelo acesso a ele, alterá-lo nem retirar os créditos. As questões da Cesgranrio são da banca e não estão cobertas por esta licença. Texto completo em creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.pt-br.

Contato:
E-mail: pvcursosinterativos@gmail.com
Website: pvconcursos.com.br

Atualizações do livro: esta cópia é a versão 2026-10-16. A mais recente fica em fisicainterativa.com/concursos, e cada versão nova é anunciada no canal do autor no WhatsApp. Aponte a câmera do celular para o código ao lado.

canal no WhatsApp

Prefácio

"Se enxerguei mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes."
Isaac Newton

Caro(a) concurseiro(a),

Este livro foi elaborado para você que busca a aprovação nos concursos de **nível médio** organizados pela banca **Cesgranrio**, como os da **Petrobras** e da **Transpetro**. A teoria serve para qualquer concurso que cobre Física em nível médio, afinal a Física não muda de acordo com a banca; os tópicos, a ênfase e a ordem das seções, porém, foram pensados para quem vai enfrentar a Cesgranrio. Ao longo de mais de 25 anos ensinando Física e mais de 15 analisando provas dessa banca, identifiquei os principais desafios dos candidatos e desenvolvi uma metodologia que vai direto ao ponto.

Por que este livro é diferente?

- **Foco na banca:** o conteúdo nasceu da análise de mais de 400 questões da Cesgranrio, dos assuntos mais recorrentes ao estilo de cobrança.
- **Teoria objetiva:** clara e direta, sem enrolação, sempre conectada com o que cai em prova, com exemplos em grau crescente de dificuldade.
- **Questões reais:** as que caíram em provas da Petrobras e da Transpetro, com gabarito e, pelo QR code, a resolução interativa no site.
- **Aplicações práticas:** a Física aplicada na indústria de petróleo e gás, o que torna o estudo mais interessante e relevante.

Como usar este livro

Siga a ordem dos capítulos, que constroem seu conhecimento progressivamente. Em cada um, leia a **introdução**; estude as **definições**, que são a base de tudo; tente resolver os **exemplos** antes de ver a solução; use as **notas** e as **dicas** para evitar erros comuns; e resolva as **questões de provas anteriores** antes de conferir o gabarito.

Método Pólya CORA

Todo exemplo resolvido deste livro segue o **Método Pólya CORA**, as quatro etapas de *A Arte de Resolver Problemas*, do matemático húngaro George Pólya, cujas iniciais formam o acrônimo **CORA**. Ao aplicar as quatro etapas básicas para resolver problemas, você desenvolverá as habilidades necessárias para responder questões de Física e Matemática rapidamente e com confiança. As etapas são:

1 **Compreender**

Que Física é esta. O assunto, o **objetivo** — o que se procura, e o que a questão está de fato cobrando — e os conceitos que o problema exige, com o significado de cada um, não só a fórmula.

2 **Organizar**

Preparar antes de calcular. Os **dados** com unidade, inclusive os que o enunciado plantou e não serão usados; as **conversões**, quando houver; um **esquema**, quando o desenho ajudar; e a **estratégia**, dita antes de ser executada.

3 **Resolver**

Agora sim, a conta. Um passo por vez, cada um com nome, uma igualdade por linha, até a resposta em destaque.

4 **Avaliar ou Acelerar**

O resultado podia ser esse? Confira a coerência pela ordem de grandeza, pelo sinal e pela unidade, e veja se há outra forma de fazer. O nome desta etapa depende do momento. No livro é **Avaliar**: você está aprendendo, sem relógio, e resolver o mesmo problema de duas maneiras é o que fixa a Física por trás dele. Na resolução interativa do QR code é **Acelerar**: você treina para a prova, com o cronômetro correndo, e a pergunta passa a ser qual é o caminho mais curto até a resposta certa; ali, um segundo método que só confirma o primeiro atrapalha.

Agradecimentos

Parafraseando Newton, este livro existe pois estive sobre os ombros de gigantes. São gigantes todos os professores e professoras que contríbuíram para a minha formação desde o ensino fundamental. O meu jeito de ensinar deve-se especialmente aos professores das disciplinas de Física Básica da UFBA, Yukimi Pregnolatto, Hélio Campos, Luiz Malbouisson e Gildemar Carneiro.

Agradeço também a minha mãe, mulher guerreira, que mesmo com pouca escolaridade, sempre me incentivou a estudar. As minhas tias que auxiliaram no meu processo de alfabetização. Agradeço aos meus avós que sempre me acolheram e me deram todo apoio necessário para que eu chegasse até aqui.

Um agradecimento especial à minha filha Juliana, que transformou a minha vida e me ensinou a ser um professor melhor. Como dizem meus ex-alunos, ela transformou o ”PV raiz”em ”PV nutella”. Se no início eu era um professor muito rígido, com o tempo aprendi que nem todo mundo quer aprender Física e Matemática com o mesmo rigor que eu aprendi. A Juliana me ensinou a ser mais paciente e a entender que cada aluno tem o seu tempo de aprendizagem.

Este livro é dedicado a todos os meus alunos e alunas, que me ensinaram muito mais do que eu ensinei a eles.

Paulo Vicente Moreira
Salvador, outubro de 2026

Sumário

Prefácio **iii**

I Mecânica

1 Conceitos Básicos **2**

1.1 Metrologia: A Ciência das Medições 3

1.2 Sistemas de Unidades de Medida 6

1.3 Notação Científica e Ordem de Grandeza 9

1.4 Algarismos Significativos 12

1.5 Análise Dimensional 16

1.6 Grandezas Físicas: Escalares e Vetoriais 20

2 Cinemática **40**

2.1 Conceitos Iniciais 41

2.2 Movimento em Uma Dimensão 49

2.3 Movimento em Duas Dimensões 74

3 Dinâmica **85**

3.1 Força e Interações 86

3.2 Primeira Lei de Newton (Inércia) 92

3.3 Segunda Lei de Newton 98

3.4 Massa e Peso 103

3.5 Terceira Lei de Newton (Ação e Reação) 109

3.6 Diagramas de Corpo Livre 113

3.7 Aplicação da Primeira Lei: Partículas em Equilíbrio . . 118
3.8 Equilíbrio de Corpo Extenso: Torque e Alavancas 125
3.9 Aplicação da Segunda Lei: Dinâmica de Partículas . . . 130
3.10 Forças de Atrito 135
3.11 Dinâmica do Movimento Circular 143

4 Energia e Trabalho **150**
4.1 Trabalho de uma Força 151
4.2 Energia Cinética e Teorema Trabalho-Energia 158
4.3 Forças Conservativas e Energia Potencial 164
4.4 Conservação da Energia Mecânica 169
4.5 Potência e Rendimento 179

5 Mecânica dos Fluidos **188**
5.1 Densidade e Pressão 189
5.2 Pressão Hidrostática e o Teorema de Stevin 194
5.3 Princípio de Pascal 200
5.4 Empuxo e o Princípio de Arquimedes 206
5.5 Vazão e Equação da Continuidade 212
5.6 Equação de Bernoulli 217

II Física Térmica

6 Termologia **225**
6.1 Temperatura e Escalas Termométricas 226
6.2 Dilatação Térmica 234
6.3 Calor e Calorimetria 243
6.4 Mudanças de Fase e Calor Latente 250
6.5 Propagação de Calor 255

7 Termodinâmica e Máquinas Térmicas **262**
7.1 Gás Ideal e Equação de Estado 263
7.2 Transformações Gasosas 268

7.3 Primeira Lei da Termodinâmica 276
7.4 Segunda Lei da Termodinâmica 283
7.5 Máquinas Térmicas e Ciclo de Carnot 285
7.6 Refrigeradores e Bombas de Calor 295

III Eletricidade e Magnetismo

8 Eletrostática 299
8.1 Carga Elétrica 300
8.2 Lei de Coulomb 306
8.3 Campo Elétrico 313
8.4 Potencial Elétrico e Energia 320
8.5 Condutores em Equilíbrio Eletrostático 331
8.6 Capacitores 336

9 Eletrodinâmica 346
9.1 Corrente Elétrica 348
9.2 Resistência Elétrica e as Leis de Ohm 353
9.3 Potência e Energia Elétrica 360
9.4 Associação de Resistores 371
9.5 Geradores e Receptores 382
9.6 Leis de Kirchhoff 390
9.7 Instrumentos de Medida Elétrica 397

10 Eletromagnetismo 401
10.1 Magnetismo e Campo Magnético 402
10.2 Força Magnética 403
10.3 Campo Magnético Criado por Correntes 410
10.4 Indução Eletromagnética 415
10.5 Transformadores 420
10.6 Ondas Eletromagnéticas 422
10.7 Radiação Térmica 427

Referências 432

PARTE I

Mecânica

CAPÍTULO

1

Conceitos Básicos

Quando você pode medir aquilo de que fala e exprimi-lo em números, sabe alguma coisa a respeito; quando não pode, seu conhecimento é pobre e insatisfatório.

LORD KELVIN

Londres, 3 de maio de 1883. A Institution of Civil Engineers promovia naquele ano seis palestras sobre as aplicações práticas da eletricidade, e coube a Kelvin a que tratava das unidades, "Unidades Elétricas de Medida" (*Electrical Units of Measurement*), publicada seis anos depois no primeiro volume das suas *Popular Lectures and Addresses*. Ele a abriu com a frase da epígrafe, e o motivo estava na plateia: a indústria elétrica nascente, da telegrafia submarina à iluminação, precisava de unidades de grandezas elétricas que valessem em qualquer país, e o Congresso de Paris de 1881 acabara de adotar as primeiras delas. A frase põe o conhecimento na dependência da medida: quem mede sabe alguma coisa sobre o que diz, e quem não mede sabe pouco. Há um passo a mais, que Kelvin deixa implícito: a medida só vale quando vem expressa num número que outra pessoa possa conferir. É por isso que este livro começa pela **metrologia**, a ciência das medições: antes de calcular força, pressão ou corrente, você precisa saber o que é medir, em que unidade e com quantos algarismos.

Na indústria de petróleo e gás, a precisão das medições é crítica: desde a calibração de instrumentos em refinarias até o controle de processos em plataformas *offshore*. Um erro de arredondamento ou uma

conversão de unidades mal feita pode resultar em falhas operacionais graves, com riscos ambientais, econômicos e de segurança.

Neste capítulo, você aprenderá o que a banca Cesgranrio cobra sobre medição, unidades e grandezas:

- Compreender os princípios da metrologia e a importância da calibração;
- Utilizar corretamente o Sistema Internacional de Unidades (SI);
- Reconhecer a evolução histórica das definições das unidades básicas;
- Expressar resultados com o número adequado de algarismos significativos;
- Estimar ordens de grandeza para verificar resultados;
- Aplicar análise dimensional para prever e verificar fórmulas;
- Classificar grandezas físicas em escalares e vetoriais;
- Realizar operações com grandezas vetoriais.

1.1 Metrologia: A Ciência das Medições

A **metrologia** é a ciência que estuda as medições e suas aplicações. Na indústria de petróleo e gás, a metrologia garante que instrumentos de medição (manômetros, termômetros, medidores de vazão) forneçam leituras confiáveis e rastreáveis a padrões internacionais.

DEFINIÇÃO 1.1 • Medição

Medir é comparar uma grandeza física com outra de mesma espécie, tomada como padrão (unidade). O resultado de uma medição é sempre um **número** acompanhado de uma **unidade**.

$$\text{Medida} = \text{Valor numérico} \times \text{Unidade}$$

NOTA

Toda medição possui **incerteza**. Não existe medição perfeita: sempre há limitações do instrumento, do método ou do observador. Por isso, em contextos industriais, é fundamental conhecer a **precisão** e a **exatidão** dos instrumentos utilizados.

1.1.1 Precisão e Exatidão

Precisão e exatidão são dois conceitos frequentemente confundidos, mas distintos:

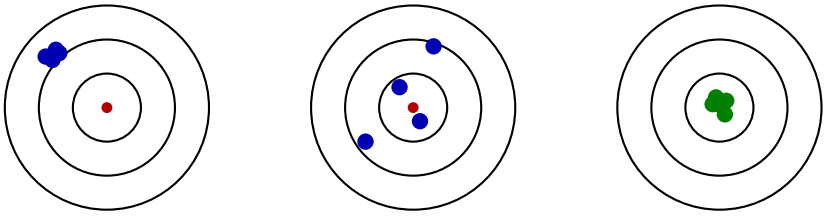
- **Precisão:** grau de concordância entre medições repetidas. Um

instrumento preciso fornece valores próximos entre si, com pequena dispersão.

- **Exatidão:** grau de concordância entre o valor medido e o valor verdadeiro (ou valor de referência). Um instrumento exato fornece valores próximos ao valor real.

DICA

Em provas, lembre-se: precisão está relacionada à **repetibilidade**; exatidão está relacionada à **proximidade do valor verdadeiro**.



Preciso, não exato | Exato, não preciso | Preciso e exato

Figura 1.1

NOTA

O **Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM)** usa três termos. **Exatidão** é a proximidade entre o valor medido e o valor verdadeiro, e reúne duas ideias: a **veracidade**, proximidade entre a média das medições e o valor de referência, e a **precisão**, dispersão entre as medições repetidas. Em concursos da banca Cesgranrio, o par cobrado é o tradicional: precisão e exatidão.

1.1.2 Calibração de Instrumentos

A **calibração** é o processo de comparar as indicações de um instrumento com um padrão de referência conhecido. Em empresas do setor energético (Petrobras, Transpetro, entre outras), instrumentos críticos, como medidores de vazão de petróleo, sensores de pressão em risers e termopares em unidades de destilação, são calibrados periodicamente para garantir a confiabilidade das medições e a rastreabilidade aos padrões nacionais do Inmetro.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO – Técnico em Operação 2005

A d.d.p. em um circuito foi medida com o auxílio de três multímetros diferentes, sendo que para cada aparelho foram feitas cinco leituras distintas. Os resultados obtidos foram os seguintes:

- Multímetro A: $1{,}20 \pm 0{,}20$ V
- Multímetro B: $1{,}50 \pm 0{,}50$ V
- Multímetro C: $1{,}40 \pm 0{,}05$ V

Sabendo-se que o valor teórico calculado para a d.d.p. é de 1,50 V, conclui-se corretamente que o multímetro:

(A) A é o mais impreciso.

(B) B é o mais preciso.

(C) B é o mais inexato.

(D) C é o mais exato.

(E) C é o mais preciso.

6FBT2R

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014

Um técnico mediu a massa de um analito usando uma balança. A primeira operação foi medir a massa do copo bécher e zerar a balança. A segunda operação foi medir a massa do conjunto copo bécher e analito. O resultado indicado no visor da balança correspondeu à massa de analito.

Se a incerteza da medição da massa em cada uma das operações foi 0,002 g, a aproximação para a incerteza do resultado, em gramas e com três ordens decimais, é de

(A) 0,002

(B) 0,003

(C) 0,004

(D) 0,006

(E) 0,010

7K752B

1.2 Sistemas de Unidades de Medida

1.2.1 Origem do Sistema Métrico Decimal

Para medir e comparar grandezas físicas, é necessário um sistema de unidades padronizado. O **Sistema Métrico Decimal** foi criado na França em 1795, baseado em múltiplos de dez, facilitando as conversões entre unidades.

Inicialmente foram criadas três unidades básicas, definidas a partir de referências concretas e tangíveis, o planeta, a água e o dia solar:

- **Metro (m)**: unidade de comprimento, originalmente definida como $\frac{1}{10\,000\,000}$ da distância do Equador ao Polo Norte, medida ao longo do meridiano que passa por Paris.
- **Quilograma (kg)**: unidade de massa, originalmente definida como a massa de um decímetro cúbico (um litro) de água pura à temperatura de 4 °C.
- **Segundo (s)**: unidade de tempo, originalmente baseada na divisão do dia solar médio em 24 horas, cada hora em 60 minutos e cada minuto em 60 segundos ($1\,\text{s} = \frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio).

1.2.2 Sistema Internacional de Unidades (SI)

O **Sistema Internacional de Unidades (SI)** é a evolução do Sistema Métrico Decimal, adotado mundialmente para garantir uniformidade nas medições científicas e técnicas. O SI é composto por sete unidades básicas:

NOTA

O SI foi criado em 1960, na 11ª Conferência Geral de Pesos e Medidas (CGPM), em Paris.

Grandeza	Unidade SI	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampere	A
Temperatura termodinâmica	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Tabela 1.1: *Unidades básicas do Sistema Internacional (SI).*

1.2.3 Evolução das Definições: da Matéria às Constantes Fundamentais

As unidades básicas do SI passaram por uma profunda transformação ao longo dos séculos. Originalmente, eram definidas a partir de

objetos ou fenômenos físicos tangíveis: o comprimento do meridiano terrestre, a massa de um volume de água, a duração do dia solar. Essas definições, embora intuitivas, apresentavam problemas: o meridiano não é perfeitamente constante; a água muda de densidade com a temperatura e a pressão; e a rotação da Terra não é uniforme.

A solução encontrada pela comunidade científica foi **redefinir as unidades a partir de constantes fundamentais da natureza**, grandezas que têm o mesmo valor em qualquer lugar do universo. A última grande redefinição ocorreu na 26ª CGPM, em novembro de 2018, e entrou em vigor em 20 de maio de 2019 (Dia Mundial da Metrologia). Nessa data, o antigo quilograma-protótipo internacional, o cilindro de platina-irídio guardado em Sèvres, França, desde 1889, foi oficialmente aposentado e substituído por uma definição baseada na *constante de Planck*.

NOTA

Desde 2019, nenhuma unidade do SI depende de um artefato físico: todas são definidas a partir de constantes fundamentais da natureza, fixadas por convenção, e podem ser reproduzidas em qualquer laboratório suficientemente preciso.

Unidade	Definição Histórica	Definição Atual (desde 2019)
Metro (m)	Fração $\frac{1}{10\,000\,000}$ do meridiano terrestre (1795).	Distância percorrida pela luz no vácuo em $\frac{1}{299\,792\,458}$ de segundo (baseada em c).
Quilograma (kg)	Massa de 1 litro de água pura a 4 °C (1795).	Definida pela constante de Planck: $h = 6{,}62607015 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$.
Segundo (s)	$\frac{1}{86\,400}$ do dia solar médio (1795).	Duração de 9 192 631 770 períodos da radiação correspondente à transição hiperfina do estado fundamental do átomo de ^{133}Cs (desde 1967).
Ampere (A)	Criado em 1948; definido pela força entre fios paralelos percorridos por corrente.	Definido pela carga elementar: $e = 1{,}602176634 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.
Kelvin (K)	Criado em 1954; definido a partir do ponto triplo da água.	Definido pela constante de Boltzmann: $k_\mathrm{B} = 1{,}380649 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$.
Mol (mol)	Criado em 1971; quantidade de matéria em 12 g de ^{12}C.	Contém exatamente $6{,}02214076 \times 10^{23}$ entidades elementares (constante de Avogadro N_A).
Candela (cd)	Criada em 1948; baseada na emissão de um corpo negro a temperatura específica.	Definida pela eficácia luminosa $K_\mathrm{cd} = 683\,\mathrm{lm/W}$ para radiação monocromática de frequência $540 \times 10^{12}\,\mathrm{Hz}$.

Tabela 1.2: *Evolução das definições das sete unidades básicas do SI.*

NOTA

Para concursos de nível médio, não é necessário memorizar os valores numéricos das constantes. Basta reconhecer as associações essenciais: metro ↔ velocidade da luz c; quilograma ↔ constante de Planck h; segundo ↔ frequência do ^{133}Cs.

1.2.4 Grandezas Derivadas

Além das unidades básicas, o SI inclui **unidades derivadas**, que são combinações das unidades básicas para medir outras grandezas físicas comuns. Exemplos incluem:

Grandeza	Unidade Derivada	Símbolo
Área	metro quadrado	m^2
Volume	metro cúbico	m^3
Densidade	quilograma por metro cúbico	$\mathrm{kg/m}^3$
Frequência	hertz	Hz (1/s)
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	metro por segundo ao quadrado	$\mathrm{m/s}^2$
Força	newton	N ($\mathrm{kg \cdot m/s}^2$)
Pressão	pascal	Pa ($\mathrm{N/m}^2$)
Energia	joule	J (N · m)
Potência	watt	W (J/s)

Tabela 1.3: *Exemplos de unidades derivadas do SI.*

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2018

A unidade de pressão usada no Sistema Internacional de Unidades e sua expressão em unidades de base do SI são, respectivamente,

(A) atm, $\mathrm{kgf/m}^2$

(B) atm, $\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}$

(C) bar, $\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}$

(D) Pa, $\mathrm{m}^{-1}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}$

(E) Pa, $\mathrm{N/m}^2$

462MVR

1.2.5 Prefixos do SI

Para lidar com grandezas muito grandes ou muito pequenas, o SI utiliza **prefixos** que indicam múltiplos ou submúltiplos das unidades básicas.

Fator	Prefixo	Símbolo
10^{1}	deca	da
10^{2}	hecto	h
10^{3}	quilo	k
10^{6}	mega	M
10^{9}	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	exa	E
10^{21}	zetta	Z
10^{24}	yotta	Y
10^{27}	ronna	R
10^{30}	quetta	Q

Tabela 1.4: *Múltiplos do SI. Os prefixos* ronna *e* quetta *foram adotados pela 27ª CGPM em 2022.*

Fator	Prefixo	Símbolo
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	mili	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a
10^{-21}	zepto	z
10^{-24}	yocto	y
10^{-27}	ronto	r
10^{-30}	quecto	q

Tabela 1.5: *Submúltiplos do SI. Os prefixos* ronto *e* quecto *foram adotados pela 27ª CGPM em 2022.*

1.3 Notação Científica e Ordem de Grandeza

DEFINIÇÃO 1.2 • Notação Científica

A **notação científica** expressa números muito grandes ou muito pequenos de forma compacta, como o produto de um fator entre 1 e 10 por uma potência de 10. O fator a é chamado de *mantissa* (ou coeficiente) e o expoente n indica a ordem da potência de 10.

$$N = a \times 10^{n} \quad \text{com} \quad 1 \leq |a| < 10 \tag{1.1}$$

N: número a representar
a: mantissa, um só algarismo antes da vírgula
n: expoente inteiro, a ordem da potência de 10

EXEMPLO 1.1 • Conversão para notação científica

Expresse em notação científica:

a) A distância média Terra-Sol: 149 600 000 km
b) O diâmetro de um átomo de hidrogênio: 0,000 000 000 106 m

1 Compreender

O assunto é **notação científica**, a forma compacta de escrever números muito grandes ou muito pequenos.

Objetivo. Reescrever os dois números na forma $a \times 10^{n}$, com um só algarismo não nulo antes da vírgula. O que está em jogo é contar quantas posições a vírgula anda e para que lado: esse número, com o sinal, é o expoente.

Antes de seguir, escreva a Equação (1.1) e diga o que cada símbolo significa. O trabalho todo está em deslocar a vírgula e contar as posições percorridas. Vírgula deslocada para a **esquerda** (número grande) dá expoente **positivo**; para a **direita** (número pequeno), expoente **negativo**.

2 Organizar

Dados 149 600 000 km
0,000 000 000 106 m.

Conversões nenhuma: o exercício é de escrita, e as unidades ficam como estão.

Estratégia localize a vírgula (no primeiro número ela está implícita, depois do último zero), leve-a para logo após o primeiro algarismo não nulo e conte as posições percorridas.

3 Resolver

a) Distância Terra-Sol. Mova a vírgula 8 posições para a esquerda:

$$149\,600\,000\,\text{km} = 1{,}496 \times 10^{8}\,\text{km}$$

b) Diâmetro do átomo. Mova a vírgula 10 posições para a direita:

$$0{,}000\,000\,000\,106\,\text{m} = 1{,}06 \times 10^{-10}\,\text{m}$$

4 Avaliar

Confira o sinal do expoente pela ordem de grandeza: a distância Terra-Sol é enorme, então o expoente tem de ser positivo; o átomo é minúsculo, então o expoente tem de ser negativo. Se o sinal vier trocado, a contagem de posições foi feita no sentido errado.

1.3.1 Ordem de Grandeza

A **ordem de grandeza** de um número é a potência de 10 mais próxima desse número. É uma ferramenta poderosa para:

- Estimar resultados rapidamente;
- Verificar se uma resposta faz sentido;
- Comparar grandezas de escalas muito diferentes.

DEFINIÇÃO 1.3 • Ordem de Grandeza

Para determinar a ordem de grandeza de um número $N = a \times 10^n$ (com $1 \leq a < 10$):

- Se $a < \sqrt{10} \approx 3{,}16$, a ordem de grandeza é 10^n.
- Se $a \geq \sqrt{10} \approx 3{,}16$, a ordem de grandeza é 10^{n+1}.

Grandeza	Valor	Ordem de Grandeza
Raio de um próton	10^{-15} m	10^{-15} m
Diâmetro de um átomo	10^{-10} m	10^{-10} m
Espessura de um fio de cabelo	10^{-4} m	10^{-4} m
Altura de uma pessoa	1,7 m	10^{0} m
Comprimento de um oleoduto	10^{3} m	10^{3} m
Raio da Terra	$6{,}4 \times 10^{6}$ m	10^{7} m
Distância Terra-Sol	$1{,}5 \times 10^{11}$ m	10^{11} m

NOTA

Alguns livros didáticos brasileiros adotam um critério alternativo, o arredondamento aritmético com corte em 5. O critério apresentado aqui, chamado critério geométrico, é o de obras como *Halliday* e *Tipler* e o mais frequente nas provas da Cesgranrio.

DICA

Sempre verifique a ordem de grandeza do seu resultado! Se obtiver algo absurdo (como uma pessoa de 10^{-5} m de altura ou uma força de 10^{20} N), há erro no cálculo.

1.4 Algarismos Significativos

Saber identificar corretamente os **algarismos significativos** é essencial para expressar resultados de forma adequada.

DEFINIÇÃO 1.4 • Algarismos Significativos

Algarismos significativos são todos os dígitos de um número que carregam informação sobre a precisão da medida. O conjunto é formado por todos os algarismos *corretos* (garantidos pelo instrumento) mais um único algarismo *duvidoso* (estimado).

As regras para identificar os algarismos significativos são:

1. Todos os dígitos **diferentes de zero** são significativos.
2. Zeros **entre** dígitos significativos são significativos.
3. Zeros à **esquerda** do primeiro dígito não nulo **não** são significativos.
4. Zeros à **direita** de um número decimal são significativos.
5. Zeros à direita de um número inteiro **sem vírgula decimal** são **ambíguos**: sua significância depende do contexto ou da notação usada. Para eliminar a ambiguidade, utiliza-se a notação científica.

NOTA

Em metrologia moderna, os algarismos significativos estão ligados à incerteza de medição, conforme o *Guia para a Expressão da Incerteza de Medição* (GUM). Em nível médio, a regra "algarismos corretos + um duvidoso" basta.

Número	Alg. Signif.	Justificativa
3,14159	6	Todos os dígitos contam.
2,05	3	Zero entre dígitos conta.
0,0025	2	Zeros à esquerda não contam.
1,500	4	Zeros à direita do decimal contam.
1200	2 a 4	Ambíguo: depende do contexto.
$1{,}200 \times 10^3$	4	Notação científica elimina ambiguidade.
$1{,}2 \times 10^3$	2	Notação científica elimina ambiguidade.

1.4.1 Operações com Algarismos Significativos

Soma e Subtração: o resultado deve ter o mesmo número de **casas decimais** que o termo com **menos casas decimais**.

EXEMPLO 1.2 • Soma com algarismos significativos

Três técnicos mediram o comprimento de uma peça:

- Técnico A: 12,720 cm
- Técnico B: 12,3 cm
- Técnico C: 12,35 cm

O valor mais provável do comprimento da peça é a média das três medições. Calcule essa média com o número correto de algarismos significativos.

1 Compreender

O assunto é **algarismos significativos** na soma: se os técnicos mediram corretamente, usaram instrumentos de precisões diferentes.

Objetivo. Calcular a média das três medições e escrevê-la com o número certo de casas decimais. O que está em jogo é saber que a média deve refletir a menor precisão entre as medições, porque não se melhora a precisão de uma medida calculando uma média.

Antes de seguir, releia a Definição 1.4 e diga com suas palavras o que ela afirma. A regra que a questão cobra é a da soma e subtração, enunciada logo acima: o resultado fica com as casas decimais do termo que tem menos casas.

2 Organizar

Dados 12,720 cm (3 casas decimais)
12,3 cm (1 casa decimal)
12,35 cm (2 casas decimais).

Conversões nenhuma: as três medidas já estão em centímetros.

Estratégia calcule a média aritmética e arredonde o resultado para a menor quantidade de casas decimais entre as medidas.

3 Resolver

Média aritmética. Some as três medidas e divida por três:

$$L_m = \frac{12{,}720 + 12{,}3 + 12{,}35}{3} = \frac{37{,}370}{3} = 12{,}4566\ldots\ \text{cm}$$

Arredondamento. Deixe o resultado com uma casa decimal, que é o que a medida menos precisa permite:

$$L_m = 12{,}5\ \text{cm}$$

Resposta: o valor mais provável do comprimento da peça é 12,5 cm.

4 Avaliar

Às vezes cometemos erros grosseiros ao realizar cálculos com pressa. Sempre verifique se o resultado obtido é coerente com os dados. Neste caso, valores acima de 12,72 cm ou abaixo de 12,3 cm não fariam sentido (a média está sempre entre o menor e o maior valor). Essa análise também ajuda a eliminar alternativas absurdas em provas de múltipla escolha.

Multiplicação e Divisão: o resultado deve ter o mesmo número de **algarismos significativos** que o fator com **menos algarismos significativos**.

> **EXEMPLO 1.3** • Divisão com algarismos significativos
>
> Em uma análise de laboratório, foram medidos:
>
> - Massa de uma amostra: $m = 12{,}45\,\text{g}$
> - Volume ocupado: $V = 5{,}2\,\text{cm}^3$
>
> Calcule a densidade da amostra com o número correto de algarismos significativos.

1 Compreender

O assunto é **algarismos significativos** na divisão, aplicada ao cálculo de uma densidade.

Objetivo. Calcular a densidade da amostra e escrevê-la com o número certo de algarismos significativos. O que está em jogo é a regra da multiplicação e divisão, que conta algarismos significativos, e não casas decimais como a da soma: o resultado fica com os algarismos do fator que tem menos.

Antes de seguir, releia a Definição 1.4 e diga com suas palavras o que ela afirma. A densidade é a massa por unidade de volume, $\rho = m/V$. A unidade do SI é kg/m^3, mas os dados vêm em gramas e centímetros cúbicos, e o resultado pode ficar em g/cm^3 e ser convertido depois.

2 Organizar

Dados $m = 12{,}45\,\text{g}$ (4 algarismos significativos)
$V = 5{,}2\,\text{cm}^3$ (2 algarismos significativos).

Conversões nenhuma: o resultado fica em g/cm^3, a unidade dos dados.

Estratégia divida m por V e deixe o resultado com o menor número de algarismos significativos entre os fatores.

3 Resolver

Divisão. Divida a massa pelo volume:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{12{,}45}{5{,}2} = 2{,}394230769\ldots\ \text{g/cm}^3$$

Arredondamento. Deixe o resultado com 2 algarismos significativos, os do fator que tem menos:

$$\rho = 2{,}4\ \text{g/cm}^3$$

4 Avaliar

Sempre avalie se o resultado é coerente com os dados fornecidos. Em muitos casos essa análise ajuda a evitar erros comuns e até a responder questões de múltipla escolha por eliminação. A densidade obtida ($2{,}4\ \text{g/cm}^3$) é típica de materiais como alumínio ou certos tipos de vidro, valor fisicamente plausível.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2011
Um ano-luz é igual a $9{,}46 \times 10^{15}$ m. A distância entre a Terra e o Sol é de 150×10^{6} km.
Quanto equivale em anos-luz essa distância?
Dado: Resposta em números significativos.

(A) 16×10^{-6} anos-luz
(B) $15{,}85 \times 10^{-6}$ anos-luz
(C) $15{,}856 \times 10^{-6}$ anos-luz
(D) $15{,}86 \times 10^{-6}$ anos-luz
(E) $15{,}9 \times 10^{-6}$ anos-luz

N82JFC

1 Compreender

A questão junta duas ferramentas deste capítulo: **notação científica**, para dividir números muito grandes sem se perder nos zeros, e **algarismos significativos**, para decidir quantos algarismos o resultado pode ter.

Objetivo. Converter a distância Terra-Sol para anos-luz, ou seja, contar quantas vezes o ano-luz cabe nela. O que está em jogo é o arredondamento: a pista está no "Dado", e a banca quer o resultado com o número certo de algarismos, não o valor bruto da divisão.

Antes de seguir, escreva a Equação (1.1) e diga o que cada símbolo significa. Na divisão de dois números em notação científica, as mantissas se dividem e os expoentes se subtraem; e a regra da divisão com algarismos significativos manda o resultado ficar com os algarismos do fator que tem menos.

2 **Organizar**

Dados 1 ano-luz $= 9{,}46 \times 10^{15}$ m (3 algarismos significativos)
$d = 150 \times 10^{6}$ km.

Conversões $d = 150 \times 10^{6}\,\text{km} = 150 \times 10^{9}\,\text{m} = 1{,}50 \times 10^{11}\,\text{m}$.

Estratégia divida d pelo ano-luz, separando mantissas e potências de 10, e arredonde para 3 algarismos significativos, que é o que o dado menos preciso permite.

3 **Resolver**

Divisão pelo ano-luz. Separe as mantissas das potências de 10:

$$\frac{d}{1\,\text{ano-luz}} = \frac{1{,}50 \times 10^{11}}{9{,}46 \times 10^{15}} = \frac{1{,}50}{9{,}46} \times 10^{-4}$$
$$= 0{,}1586\ldots \times 10^{-4} = 15{,}86\ldots \times 10^{-6}$$

Arredondamento. Deixe 3 algarismos significativos:

$$d \approx 15{,}9 \times 10^{-6}\ \text{anos-luz}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a luz do Sol leva cerca de 8 minutos para chegar à Terra, e 8 minutos são $8/(365 \times 24 \times 60) \approx 1{,}5 \times 10^{-5}$ do ano, ou seja, 15×10^{-6}. O resultado bate. **Cuidado com a pegadinha:** as alternativas (C) e (D) são o valor da divisão com 5 e 4 algarismos, e (B) é o mesmo valor truncado. Quem faz a conta certa e não aplica a regra dos algarismos significativos marca uma delas. A regra é a da divisão: o resultado fica com o menor número de algarismos significativos entre os fatores, e 9,46 tem três.

1.5 Análise Dimensional

A **análise dimensional** é uma técnica que utiliza as dimensões das grandezas físicas para verificar equações, prever a estrutura de fórmulas e converter unidades.

1.5.1 Dimensões Fundamentais

No SI, as *sete* dimensões fundamentais correspondem às sete unidades básicas. No estudo da Mecânica, utilizamos apenas três:

- $[L]$ = comprimento (metro);
- $[M]$ = massa (quilograma);
- $[T]$ = tempo (segundo).

Todas as outras grandezas mecânicas podem ser expressas como combinações dessas três dimensões fundamentais.

NOTA

Ao longo deste livro, surgirão novas dimensões fundamentais: $[\Theta]$ para temperatura (na Termologia, cap. 6) e $[I]$ para corrente elétrica (na Eletrodinâmica, cap. 9).

Grandeza	Dimensão	Unidade SI
Velocidade	$[L][T]^{-1}$	m/s
Aceleração	$[L][T]^{-2}$	$\mathrm{m/s^2}$
Força	$[M][L][T]^{-2}$	$\mathrm{N = kg \cdot m/s^2}$
Energia / Trabalho	$[M][L]^2[T]^{-2}$	$\mathrm{J = kg \cdot m^2/s^2}$
Pressão	$[M][L]^{-1}[T]^{-2}$	$\mathrm{Pa = kg/(m \cdot s^2)}$
Potência	$[M][L]^2[T]^{-3}$	$\mathrm{W = kg \cdot m^2/s^3}$

1.5.2 Verificação de Fórmulas

Uma equação física só pode ser correta se ambos os lados tiverem a **mesma dimensão**. Essa é uma ferramenta poderosa para detectar erros em equações e até mesmo para recuperar fórmulas esquecidas.

EXEMPLO 1.4 • Verificação de fórmula

É comum que estudantes confundam as fórmulas da frequência e do período de um pêndulo simples. Verifique se a fórmula abaixo pode calcular o período T de um pêndulo simples:

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

- T = período (s);
- g = aceleração da gravidade ($\mathrm{m/s^2}$);
- L = comprimento do pêndulo (m).

1 **Compreender**

O assunto é **análise dimensional** como ferramenta de verificação: uma equação só pode estar certa se os dois lados tiverem a mesma dimensão.

Objetivo. Decidir se a fórmula dada pode calcular um período. O que está em jogo é comparar dimensões, não valores: o lado direito

precisa ter dimensão de tempo, $[T]$, e a constante $\frac{1}{2\pi}$, adimensional, sai da análise.

Do lado esquerdo está o período T, cuja dimensão é $[T]$. Do lado direito estão g, de dimensão $[L][T]^{-2}$, e L, de dimensão $[L]$. Você pode operar com as dimensões fundamentais ou, o que dá no mesmo, com as unidades do SI.

2 Organizar

Dados $[T] = [T]$
$[g] = [L][T]^{-2}$
$[L] = [L]$
$\frac{1}{2\pi}$ adimensional.

Conversões nenhuma: a análise é feita com dimensões, não com valores.

Estratégia substitua as dimensões no lado direito da fórmula e compare com a dimensão do lado esquerdo.

3 Resolver

Dimensão do lado direito. Como 2π é adimensional, ignore a constante e substitua as dimensões:

$$[T] \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{[g]}{[L]}} = \sqrt{\frac{[L][T]^{-2}}{[L]}} = \sqrt{[T]^{-2}} = [T]^{-1}$$

4 Avaliar

O lado direito tem dimensão $[T]^{-1}$ (que é a dimensão de frequência), enquanto o lado esquerdo é $[T]$. Portanto, as dimensões não coincidem e a fórmula está **incorreta**: ela na verdade descreve a frequência, não o período.

A expressão correta para o período do pêndulo simples é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

> **EXEMPLO 1.5** • Descobrindo fórmulas por análise dimensional
>
> A velocidade de propagação v de uma onda em uma corda depende da tensão F (força que estica a corda) e da densidade linear μ (massa por unidade de comprimento). Use análise dimensional para deduzir a estrutura da fórmula.

NOTA

A análise dimensional não fornece as constantes adimensionais, como $^1/_2$ e π: ela determina a estrutura da fórmula. A constante exige tratamento teórico ou experimental.

NOTA

Na prática é comum usar as unidades do SI no lugar das dimensões: para o pêndulo, $[g] = \text{m/s}^2$ e $[L] = \text{m}$, e o resultado tem de sair em segundos.

NOTA

No cap. 3 (Dinâmica), usaremos o símbolo T para *tração* em cordas. Aqui, usamos F para evitar confusão com a dimensão $[T]$ do tempo.

1 Compreender

O assunto é **análise dimensional** usada ao contrário: em vez de conferir uma fórmula pronta, descobrir a estrutura de uma fórmula a partir das dimensões das grandezas de que ela depende.

Objetivo. Deduzir como v depende de F e de μ. O que está em jogo é escrever $v = k \cdot F^a \cdot \mu^b$ e achar os expoentes igualando as dimensões dos dois lados; a constante k a análise não fornece.

A velocidade v tem dimensão $[L][T]^{-1}$; a força F, tensão na corda, tem dimensão $[M][L][T]^{-2}$; e a densidade linear μ, massa por unidade de comprimento, tem dimensão $[M][L]^{-1}$.

2 Organizar

Dados $[v] = [L][T]^{-1}$
$[F] = [M][L][T]^{-2}$
$[\mu] = [M][L]^{-1}$.

Conversões nenhuma: a análise é feita com dimensões, não com valores.

Estratégia suponha $v = k \cdot F^a \cdot \mu^b$, com k uma constante adimensional, e determine a e b igualando as dimensões dos dois lados.

3 Resolver

Equação dimensional. Substitua as dimensões na forma suposta:

$$[L][T]^{-1} = \left([M][L][T]^{-2}\right)^a \cdot \left([M][L]^{-1}\right)^b$$

$$[L][T]^{-1} = [M]^{a+b}\,[L]^{a-b}\,[T]^{-2a}$$

Sistema de equações. Iguale os expoentes de cada dimensão:

$$\begin{aligned} [M]: &\quad 0 = a + b \\ [L]: &\quad 1 = a - b \\ [T]: &\quad -1 = -2a \end{aligned}$$

Da terceira equação: $a = {}^1\!/_2$. Da primeira: $b = -{}^1\!/_2$.

Fórmula. Leve os expoentes de volta à forma suposta:

$$v = k \cdot F^{1/2} \cdot \mu^{-1/2} = k\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

4 **Avaliar**

A velocidade da onda é proporcional a $\sqrt{F/\mu}$. A constante $k = 1$ pode ser determinada experimentalmente ou por dedução teórica completa, fato verificável em laboratórios de acústica e em ensaios de cabos tensionados na indústria.

1.6 Grandezas Físicas: Escalares e Vetoriais

Uma **grandeza física** é uma propriedade mensurável de um fenômeno, corpo ou substância. As grandezas físicas podem ser classificadas em três tipos principais: **adimensionais**, **escalares** e **vetoriais**.

DEFINIÇÃO 1.5 • Grandezas Adimensionais

As **grandezas adimensionais** são aquelas que não possuem unidade de medida associada. Elas são expressas apenas por um número puro, sem dimensão física.

Exemplos comuns incluem:

- Coeficiente de atrito;
- Coeficiente de restituição;
- Índice de refração.

NOTA

Grandezas adimensionais frequentemente surgem como razões entre grandezas da mesma espécie, resultando na eliminação das unidades.

DEFINIÇÃO 1.6 • Grandezas Escalares

As **grandezas escalares** são aquelas que são completamente descritas por um valor numérico (módulo) e uma unidade de medida.

Exemplos comuns incluem:

- Comprimento (m);
- Temperatura (°C, K);
- Massa (kg);
- Tempo (s);
- Energia (J).

DEFINIÇÃO 1.7 • Grandezas Vetoriais

As **grandezas vetoriais** são aquelas que, para serem completamente descritas, necessitam de *módulo*, *direção* e *sentido*. Essas grandezas são representadas matematicamente por vetores e são sempre acompanhadas por uma unidade de medida.

Exemplos comuns incluem:

- Deslocamento ($\vec{r}$);
- Velocidade ($\vec{v}$);
- Aceleração ($\vec{a}$);
- Força ($\vec{F}$).

Ao resolver problemas de Física, é essencial reconhecer quando as grandezas envolvidas possuem natureza vetorial, pois sua correta manipulação é indispensável para a descrição e a previsão dos fenômenos físicos. Grandezas como força, velocidade e deslocamento exigem operações vetoriais adequadas. As principais operações com vetores são:

- **Multiplicação por escalar**: consiste em multiplicar um vetor por um número real, modificando seu módulo. A direção é mantida, e o sentido é invertido apenas se o escalar for negativo.
- **Adição**: combina dois ou mais vetores para obter um vetor resultante, que representa o efeito conjunto das grandezas envolvidas, respeitando suas direções e sentidos.
- **Decomposição**: permite expressar um vetor em termos de suas componentes ao longo de direções previamente escolhidas, geralmente associadas aos eixos cartesianos, facilitando a análise dos problemas físicos.
- **Subtração**: é definida como a adição de um vetor ao seu oposto, resultando em um vetor que expressa a diferença vetorial entre duas grandezas.
- **Produto escalar**: resulta em um **número real**, dependente dos módulos dos vetores e do cosseno do ângulo entre eles. É amplamente utilizado no cálculo de grandezas como trabalho e energia.
- **Produto vetorial**: produz um **vetor** perpendicular ao plano formado pelos vetores originais, com módulo proporcional ao seno do ângulo entre eles e orientação determinada pela regra da mão direita.

1.6.1 Multiplicação de Vetor por Escalar

EXEMPLO 1.6 • Multiplicação de Vetor por Escalar

A força elétrica é definida como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, onde q é a carga elétrica (escalar) e $\vec{E}$ é o campo elétrico (vetor). Se em uma região do espaço existe um campo elétrico de módulo $|\vec{E}| = 100\,\text{N/C}$, com direção horizontal e sentido para a direita, represente graficamente a força elétrica sobre:

a) uma carga de $q_1 = +2\,\text{C}$;
b) uma carga de $q_2 = -1{,}5\,\text{C}$.

1 Compreender

O assunto é **multiplicação de vetor por escalar**: o campo elétrico $\vec{E}$ é uma grandeza vetorial, a carga q é uma grandeza escalar, que pode ser positiva ou negativa, e o produto dos dois é uma grandeza vetorial.

Objetivo. Representar a força elétrica sobre cada uma das duas cargas. O que está em jogo é o sinal da carga: é ele que decide se a força tem o mesmo sentido do campo ou o sentido oposto; o módulo sai do produto dos módulos.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Multiplicar um vetor por um escalar muda o módulo, mantém a direção e inverte o sentido só quando o escalar é negativo. O problema fornece a fórmula da força elétrica, $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

2 Organizar

Dados $|\vec{E}| = 100\,\text{N/C}$, horizontal, para a direita
$q_1 = +2\,\text{C}$
$q_2 = -1{,}5\,\text{C}$.

Conversões nenhuma: newton por coulomb vezes coulomb dá newton.

Estratégia multiplique o módulo do campo pelo módulo de cada carga e use o sinal da carga para decidir o sentido: carga positiva, mesmo sentido de $\vec{E}$; carga negativa, sentido oposto.

3 Resolver

Módulos. Multiplique o módulo de cada carga pelo módulo do campo:

$$|\vec{F}_1| = |q_1| \cdot |\vec{E}| = 2 \times 100 = 200\,\text{N}$$
$$|\vec{F}_2| = |q_2| \cdot |\vec{E}| = 1{,}5 \times 100 = 150\,\text{N}$$

Sentidos. Leia o sinal de cada carga:

- $q_1 > 0$: $\vec{F}_1$ tem **mesmo sentido** de $\vec{E}$ (para a direita);
- $q_2 < 0$: $\vec{F}_2$ tem **sentido oposto** a $\vec{E}$ (para a esquerda).

Representação gráfica. Sempre que possível, represente os vetores em um sistema de coordenadas.

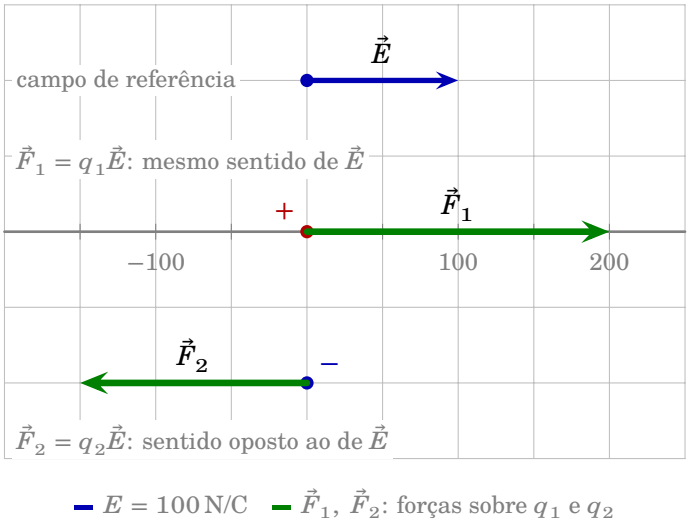


Figura 1.2

Respostas:

a) $\vec{F}_1$: módulo = 200 N, direção horizontal, sentido para a **direita**;
b) $\vec{F}_2$: módulo = 150 N, direção horizontal, sentido para a **esquerda**.

4 Avaliar

Os resultados estão de acordo com o esperado para forças elétricas: cargas positivas experimentam forças na direção do campo, enquanto cargas negativas experimentam forças na direção oposta ao campo. Esse comportamento é a base para a interpretação do sinal do campo elétrico como indicador do sentido da força sobre uma carga de prova positiva.

Em resumo, na multiplicação de um vetor por um escalar k o módulo do resultado é $|k| \cdot |\vec{v}|$, a direção permanece a mesma e o sentido inverte quando $k < 0$.

1.6.2 Adição de Vetores

Para compreender a **adição de vetores**, considere a seguinte situação física:

Você está em um barco que se move com velocidade de 4 m/s em relação à água. A água do rio, por sua vez, está se movendo com velocidade de 3 m/s em relação à margem. Você pode escolher a direção e o sentido em que apontar o barco.

A **velocidade resultante** do barco em relação à margem é dada pela soma vetorial:

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{\text{barco}} + \vec{v}_{\text{corrente}}$$

Nos exemplos a seguir, analisaremos diferentes configurações de direção do barco.

NOTA

A *composição de velocidades* é um tema clássico da cinemática vetorial e reaparecerá no cap. 2 (Cinemática), quando estudarmos movimentos relativos e lançamentos.

EXEMPLO 1.7 • Mesma direção e sentido

Um barco se move com velocidade $|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$ em relação à água, na **mesma direção e sentido** da corrente do rio, que tem velocidade $|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$. Determine a velocidade do barco em relação à margem.

1 Compreender

O assunto é **adição de vetores** no caso mais simples, os dois na mesma direção e no mesmo sentido.

Objetivo. Achar a velocidade do barco em relação à margem. O que está em jogo é reconhecer que a velocidade é uma grandeza vetorial e que a velocidade em relação à margem é a soma vetorial $\vec{v}_R = \vec{v}_b + \vec{v}_c$.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Quando os dois vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido, o módulo da resultante é a soma dos módulos.

2 Organizar

Dados $|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$
$|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$
mesma direção e mesmo sentido.

Conversões nenhuma: as duas velocidades já estão em metros por segundo.

Esquema a figura logo abaixo: para obter o vetor resultante, basta alinhar os vetores colocando o vetor que representa a velocidade da corrente na ponta do vetor que representa a velocidade do barco (método do polígono).

Estratégia some os módulos, porque os vetores têm a mesma direção e o mesmo sentido.

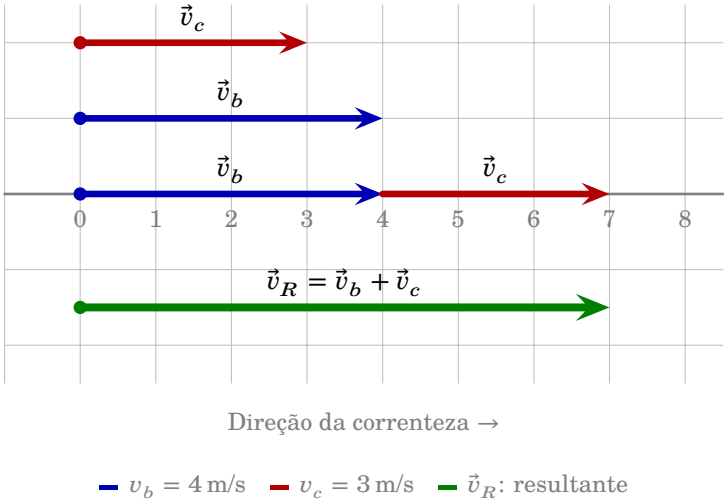


Figura 1.3

3 Resolver

Soma dos módulos. Com a mesma direção e o mesmo sentido, os módulos se somam:

$$|\vec{v}_R| = |\vec{v}_b| + |\vec{v}_c| = 4 + 3$$

$$|\vec{v}_R| = 7\,\text{m/s}$$

Resposta: a velocidade do barco em relação à margem é 7 **m/s**, na direção horizontal, sentido da corrente (a favor do rio).

4 Avaliar

A velocidade é uma grandeza vetorial; portanto, é obrigatório especificar o módulo, a direção e o sentido da velocidade resultante, a menos que o problema peça explicitamente apenas o módulo.

Quando dois vetores têm mesma direção e mesmo sentido, o vetor resultante tem módulo igual à soma dos módulos, e a mesma direção e o mesmo sentido dos vetores originais.

> **EXEMPLO 1.8** • Mesma direção, sentidos opostos
>
> O mesmo barco ($|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$) agora se move **contra a corrente** ($|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$). Determine a velocidade resultante em relação à margem.

1 Compreender

O assunto é **adição de vetores** com os dois na mesma direção e em sentidos opostos.

Objetivo. Achar a velocidade do barco em relação à margem. O que está em jogo é ver que a soma vetorial $\vec{v}_R = \vec{v}_b + \vec{v}_c$ continua valendo, mas agora os vetores se opõem: o módulo da resultante é a diferença, em valor absoluto, dos módulos, e o sentido é o do vetor de maior módulo.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma.

2 Organizar

Dados $|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$
$|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$
mesma direção, sentidos opostos.

Conversões nenhuma: as duas velocidades já estão em metros por segundo.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia subtraia os módulos e tome o valor absoluto; o sentido é o do vetor de maior módulo.

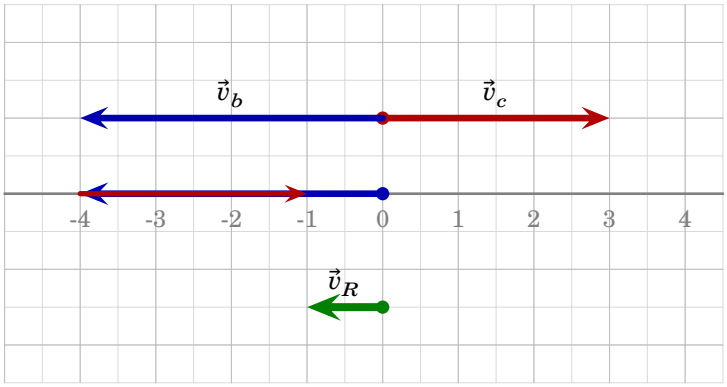


Figura 1.4

3 Resolver

Diferença dos módulos. Com sentidos opostos, o módulo da resultante é a diferença dos módulos:

$$|\vec{v}_R| = ||\vec{v}_b| - |\vec{v}_c|| = |4 - 3|$$

$$\boxed{|\vec{v}_R| = 1\,\text{m/s}}$$

Resposta: a velocidade resultante tem módulo de 1 **m/s**, na direção horizontal, e o sentido é o mesmo do barco (contra a corrente), pois $|\vec{v}_b| > |\vec{v}_c|$.

4 Avaliar

O barco consegue avançar rio acima, pois $|\vec{v}_b| > |\vec{v}_c|$. Se a velocidade do barco fosse menor que a da corrente ($|\vec{v}_b| < |\vec{v}_c|$), mesmo apontando contra a corrente, o barco seria arrastado rio abaixo! Esse mesmo raciocínio se aplica ao posicionamento dinâmico de embarcações em plataformas *offshore*: a propulsão deve compensar a deriva causada por correntes marítimas.

Na adição de vetores com mesma direção e sentidos opostos, o vetor resultante tem módulo igual à diferença, em valor absoluto, dos módulos; a direção é a mesma dos vetores originais, e o sentido coincide com o do vetor de maior módulo.

> **EXEMPLO 1.9** • Direções perpendiculares
>
> O barco ($|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$) agora aponta **perpendicularmente** à corrente ($|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$), ou seja, tenta atravessar o rio. Determine a velocidade resultante.

1 Compreender

O assunto é **adição de vetores perpendiculares**: o barco aponta para atravessar o rio, e a corrente o arrasta de lado.

Objetivo. Achar o módulo e a direção da velocidade resultante. O que está em jogo é o ângulo de 90° entre os vetores: a soma $\vec{v}_R = \vec{v}_b + \vec{v}_c$ fecha um triângulo retângulo, e por isso o módulo sai do teorema de Pitágoras e a direção, da tangente.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. A resultante não é a soma dos módulos: o barco anda a 4 m/s numa direção e a 3 m/s na outra, e o que se mede em relação à margem é a hipotenusa.

2 Organizar

Dados $|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$ (perpendicular à corrente)
$|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$ (horizontal)
ângulo entre os vetores: 90°.

Conversões nenhuma: as duas velocidades já estão em metros por segundo.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia utilizar o método do paralelogramo para representar graficamente e o Teorema de Pitágoras para calcular o módulo da resultante.

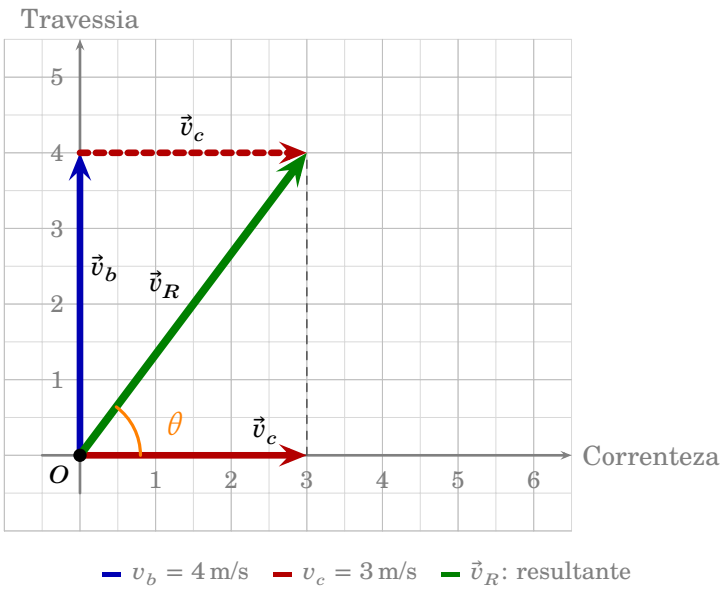


Figura 1.5

3 Resolver

Módulo, pelo teorema de Pitágoras. Os dois vetores são os catetos:

$$|\vec{v}_R| = \sqrt{|\vec{v}_b|^2 + |\vec{v}_c|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$|\vec{v}_R| = 5\,\text{m/s}$$

Direção, pela tangente. O ângulo com a corrente sai da razão entre os catetos:

$$\tan\theta = \frac{|\vec{v}_b|}{|\vec{v}_c|} = \frac{4}{3} \implies \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta \approx 53{,}1^\circ$$

Resposta: a velocidade resultante tem módulo de $5\,\mathbf{m/s}$, formando um ângulo de $53{,}1^\circ$ com a direção da corrente.

4 Avaliar

Reconheça o triângulo pitagórico 3–4–5! Quando as componentes formam esses múltiplos, você economiza tempo sem precisar calcular a raiz quadrada. Em provas de concurso, os valores numéricos costumam ser escolhidos para facilitar cálculos rápidos.

NOTA

Este é o triângulo retângulo 3-4-5, um dos triângulos pitagóricos mais conhecidos: catetos 3 e 4, ou múltiplos inteiros deles, dão hipotenusa 5, ou o mesmo múltiplo.

EXEMPLO 1.10 • Direção oblíqua

O barco ($|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$) aponta em uma direção que forma 30° com a corrente ($|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$). Determine a velocidade resultante.

1 Compreender

O assunto é **adição de vetores com ângulo qualquer**: os 30° entre o barco e a corrente tiram o triângulo retângulo, e Pitágoras deixa de servir.

Objetivo. Achar o módulo e a direção da velocidade resultante. O que está em jogo é escolher o caminho: decompor os vetores em componentes e somar componente a componente, ou aplicar a lei dos cossenos ao triângulo que a soma $\vec{v}_R = \vec{v}_b + \vec{v}_c$ forma.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Os dois caminhos chegam ao mesmo resultado, e este exemplo mostra os dois.

2 Organizar

Dados $|\vec{v}_b| = 4\,\text{m/s}$ (30° acima da horizontal)
$|\vec{v}_c| = 3\,\text{m/s}$ (horizontal)
ângulo entre $\vec{v}_b$ e a horizontal: 30°.

Conversões nenhuma: as duas velocidades já estão em metros por segundo.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia resolver por dois métodos, para demonstrar diferentes abordagens: (1) decomposição cartesiana e (2) lei dos cossenos.

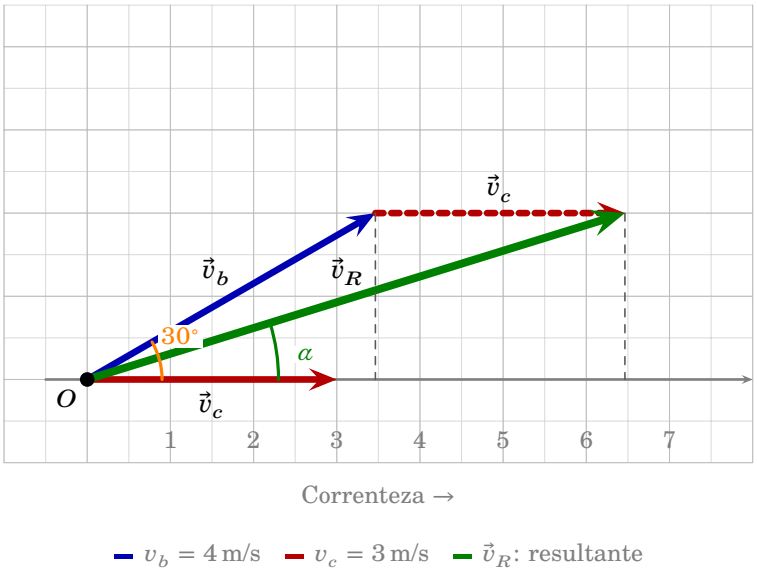


Figura 1.6

3 **Resolver**

Método 1: componentes cartesianas. Decomponha $\vec{v}_b$ em componentes:

$$v_{bx} = |\vec{v}_b|\cos(30°) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46\,\text{m/s}$$
$$v_{by} = |\vec{v}_b|\sin(30°) = 4 \times \frac{1}{2} = 2\,\text{m/s}$$

Somando as componentes (a corrente é horizontal, logo $v_{cx} = 3$ e $v_{cy} = 0$):

$$v_{Rx} = v_{bx} + v_{cx} = 2\sqrt{3} + 3 \approx 6{,}46\,\text{m/s}$$
$$v_{Ry} = v_{by} + 0 = 2\,\text{m/s}$$

Módulo da resultante:

$$\begin{aligned}|\vec{v}_R| &= \sqrt{v_{Rx}^2 + v_{Ry}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{3}+3)^2 + 2^2} \\ &\approx \sqrt{41{,}78 + 4}\end{aligned}$$

$$|\vec{v}_R| \approx 6{,}77\,\text{m/s}$$

Direção da resultante (em relação à horizontal):

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_{Ry}}{v_{Rx}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{6{,}46}\right)$$

$$\alpha \approx 17{,}2°$$

Método 2: lei dos cossenos. Quando alinhamos os vetores pelo método "extremidade-início" (polígono), o ângulo interno do triângulo formado é $180° - 30° = 150°$. Neste caso, usamos a lei dos cossenos na forma original:

$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_b|^2 + |\vec{v}_c|^2 - 2\,|\vec{v}_b|\,|\vec{v}_c|\cos(150°)$$

Como $\cos(150°) = -\cos(30°)$, a expressão equivale a:

$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_b|^2 + |\vec{v}_c|^2 + 2\,|\vec{v}_b|\,|\vec{v}_c|\cos(30°)$$

Essa é a *forma modificada* da lei dos cossenos, conveniente quando usamos a regra do paralelogramo (vetores alinhados "início-início" com ângulo de 30° entre eles).

Substituindo os valores:

$$|\vec{v}_R|^2 = 16 + 9 + 2 \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3} \approx 45{,}78$$

$$|\vec{v}_R| \approx 6{,}77\,\text{m/s}$$

Resposta: a velocidade resultante é de aproximadamente 6,77 **m/s**, formando um ângulo de 17,2° com a direção da corrente.

4 **Avaliar**

Quando o ângulo entre os vetores é "especial" (30°, 45°, 60°), prefira a lei dos cossenos com valores exatos das funções trigonométricas. Isso evita arredondamentos intermediários. Note que ambos os métodos convergem para o mesmo resultado, validando a solução.

Na adição de vetores formando um ângulo qualquer entre si, utilizamos a regra do paralelogramo para obter a direção e o sentido do vetor resultante. O módulo do vetor resultante é calculado pela **lei dos cossenos**:

NOTA

Lembre-se da identidade: $\cos(180° - \theta) = -\cos(\theta)$.

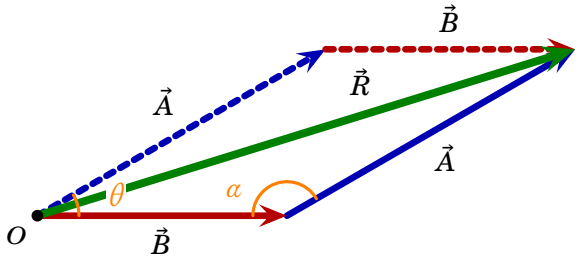


Figura 1.7

Sendo θ o ângulo entre os vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$ alinhados pelo método "início-início" (regra do paralelogramo) e $\alpha = 180° - \theta$ o ângulo correspondente quando alinhados "extremidade-início" (método do polígono):

Lei dos cossenos (forma padrão, extremidade-início):

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\alpha$$

Lei dos cossenos (forma modificada, início-início):

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2\,|\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$$

NOTA

Casos especiais da lei dos cossenos: $\theta = 0°$, mesmo sentido, $|\vec{R}| = |\vec{A}| + |\vec{B}|$; $\theta = 90°$, perpendiculares, $|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$; $\theta = 180°$, sentidos opostos, $|\vec{R}| = ||\vec{A}| - |\vec{B}||$.

EXEMPLO 1.11 • Adição de Vetores: Deslocamentos

Um carro se desloca 80 m para o norte e, em seguida, 60 m para o leste. Qual é o deslocamento total do carro?

1 Compreender

O assunto é **adição de vetores perpendiculares**: norte e leste formam 90°, e o deslocamento total é a soma vetorial dos dois trechos.

Objetivo. Achar o deslocamento total do carro, em módulo e direção. O que está em jogo é não confundir deslocamento com distância percorrida: os 140 m rodados não são a resposta, porque o deslocamento é o vetor que liga o ponto de partida ao de chegada.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Para vetores perpendiculares, o módulo da resultante é $|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$, pelo teorema de Pitágoras, e a direção sai da tangente, cateto oposto sobre cateto adjacente.

2 Organizar

Dados $|\vec{A}| = 80\,\text{m}$ (norte)
$|\vec{B}| = 60\,\text{m}$ (leste)
vetores perpendiculares ($\theta = 90°$).

Conversões nenhuma: os dois trechos já estão em metros.

Esquema a figura logo abaixo: os dois trechos formam um triângulo retângulo, e o deslocamento é a hipotenusa.

Estratégia calcule o módulo pelo teorema de Pitágoras e o ângulo pela tangente.

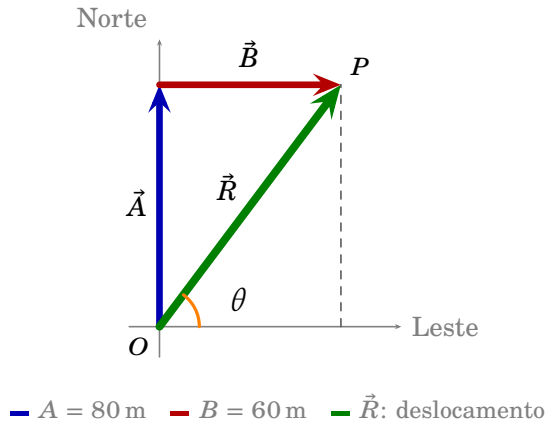


Figura 1.8

3 Resolver

Módulo, pelo teorema de Pitágoras. Os vetores são perpendiculares:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2} = \sqrt{80^2 + 60^2} = \sqrt{10\,000}$$

$$\boxed{|\vec{R}| = 100\,\text{m}}$$

Direção, pela tangente. Calcule o ângulo θ em relação ao eixo Leste:

$$\tan\theta = \frac{|\vec{A}|}{|\vec{B}|} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3} \implies \theta = \arctan\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\theta \approx 53{,}1^\circ$$

Resposta: o deslocamento total é de 100 **m** na direção 53,1° **ao norte do leste** (ou, equivalentemente, 36,9° a leste do norte).

4 **Avaliar**

Este é o triângulo 3–4–5 ampliado por fator 20: $(60, 80, 100) = 20 \times (3, 4, 5)$. Memorize os triângulos pitagóricos clássicos! Atenção: "53,1° ao norte do leste" é diferente de "53,1° ao leste do norte": a referência (segundo termo) muda completamente a direção.

NOTA

A distância percorrida, $80 + 60 = 140$ m, é diferente do módulo do deslocamento, 100 m. A diferença aparece sempre que há mudança de direção no percurso.

1.6.3 Decomposição de Vetores

Na adição de vetores, somamos dois ou mais vetores para obter um vetor resultante. Na **decomposição de vetores**, fazemos o processo inverso: dado um vetor $\vec{V}$, encontramos dois ou mais vetores (chamados de **componentes**) que, quando somados, resultam no vetor original.

Componentes Cartesianas

Em um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional, qualquer vetor $\vec{V}$ pode ser decomposto em duas componentes perpendiculares: uma horizontal (V_x), ao longo do eixo x, e uma vertical (V_y), ao longo do eixo y.

> **DEFINIÇÃO 1.8** • Componentes Cartesianas
>
> As **componentes cartesianas** de um vetor $\vec{V}$ são as projeções do vetor sobre os eixos x e y. Dado o módulo $|\vec{V}|$ e o ângulo θ que o vetor forma com o eixo x positivo, as componentes saem das razões trigonométricas no triângulo retângulo formado pelo vetor e suas projeções.

$$V_x = |\vec{V}| \cos\theta \tag{1.2}$$

$$V_y = |\vec{V}| \sin\theta \tag{1.3}$$

V_x, V_y: componentes do vetor nos eixos x e y
$|\vec{V}|$: módulo do vetor
θ: ângulo entre o vetor e o eixo x positivo

O caminho inverso também é direto. O módulo do vetor é recuperado a partir das componentes pelo teorema de Pitágoras, e o ângulo, pela tangente:

$$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \tag{1.4}$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{V_y}{V_x}\right) \tag{1.5}$$

Representação Gráfica

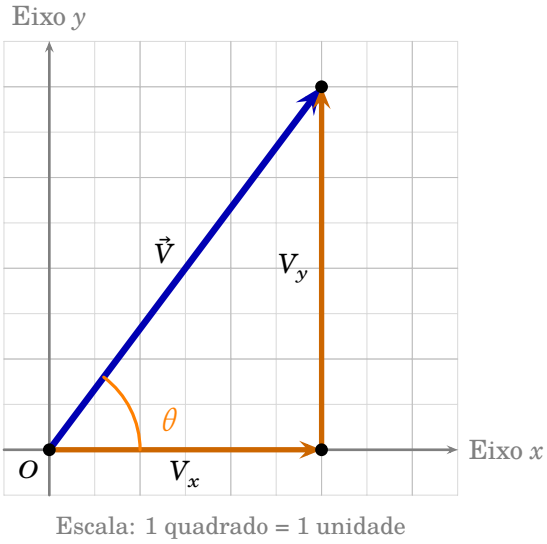


Figura 1.9

Convenção de Sinais

As componentes podem ser positivas ou negativas, dependendo do quadrante em que o vetor se encontra:

Quadrante	V_x	V_y
I (0° a 90°)	Positiva	Positiva
II (90° a 180°)	Negativa	Positiva
III (180° a 270°)	Negativa	Negativa
IV (270° a 360°)	Positiva	Negativa

NOTA

Neste livro, chamaremos de **componentes** (escalares) os números V_x e V_y, que representam as projeções do vetor nos eixos cartesianos. Quando multiplicados pelos versores $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, tornam-se **vetores componentes**: $\vec{V}_x = V_x\hat{\imath}$ e $\vec{V}_y = V_y\hat{\jmath}$. A forma mais completa de escrever um vetor é então $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$. Costumamos desenhar as componentes como setas para facilitar a visualização da decomposição.

NOTA

A escolha do sistema de coordenadas é arbitrária. Em Física, costuma-se pôr um dos eixos paralelo à direção do movimento ou da força resultante, o que simplifica as contas.

1.6.4 Subtração de Vetores

Há diversas situações em que precisamos calcular a variação de uma grandeza vetorial, como deslocamento, velocidade, aceleração ou quantidade de movimento. Nesses casos, a operação necessária é a **subtração de vetores**.

Essa operação pode ser entendida como a adição do vetor oposto. Consideremos o caso de uma bola de futebol que se desloca horizontalmente com velocidade $\vec{v}_1$; o goleiro espalma a bola, que passa a se deslocar verticalmente para cima com velocidade $\vec{v}_2$. Qual é a variação da velocidade da bola?

EXEMPLO 1.12 • Subtração de Vetores: Variação de Velocidade

Uma bola de futebol se desloca horizontalmente para a direita com velocidade $\vec{v}_1$ de módulo 4 m/s. O goleiro espalma a bola, que passa a se deslocar verticalmente para cima com velocidade $\vec{v}_2$ de módulo 3 m/s. Determine a variação da velocidade da bola.

1 **Compreender**

O assunto é **subtração de vetores**, a operação que dá a variação de uma grandeza vetorial entre dois instantes.

Objetivo. Achar a variação da velocidade da bola, em módulo e direção. O que está em jogo é lembrar que $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ é uma diferença de vetores, e que o módulo dela não é a diferença dos módulos: subtrair é somar o vetor oposto, $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$.

Antes de seguir, escreva a Equação (1.4) e diga o que cada símbolo significa. O vetor oposto tem o mesmo módulo e o sentido contrário. Feita a soma por componentes, o módulo vem do teorema de Pitágoras e a direção, da tangente.

2 Organizar

Dados $\vec{v}_1$: horizontal para a direita, $|\vec{v}_1| = 4\,\text{m/s}$
$\Rightarrow (v_{1x}, v_{1y}) = (4, 0)$
$\vec{v}_2$: vertical para cima, $|\vec{v}_2| = 3\,\text{m/s}$
$\Rightarrow (v_{2x}, v_{2y}) = (0, 3)$.

Conversões nenhuma: as duas velocidades já estão em metros por segundo.

Esquema a figura logo abaixo: o paralelogramo de $\vec{v}_2$ com $-\vec{v}_1$.

Estratégia 1) transformar a subtração em adição: $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$; 2) calcular as componentes de $\Delta\vec{v}$; 3) determinar o módulo e a direção.

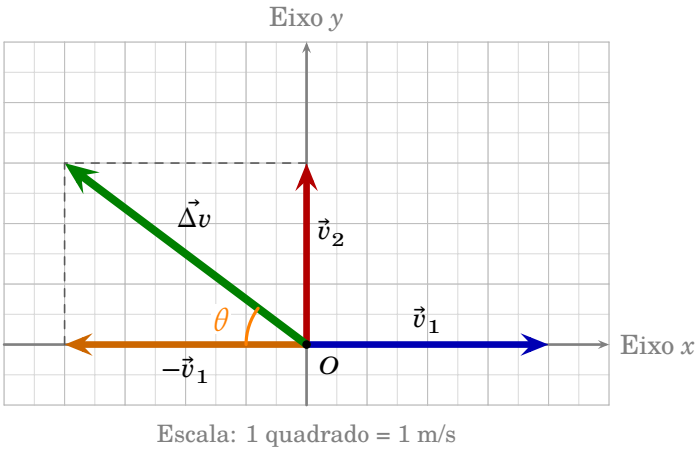


Figura 1.10

3 Resolver

Subtração como soma do oposto. A variação da velocidade é definida como $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Reescreva a subtração como adição do vetor oposto, que tem o mesmo módulo de $\vec{v}_1$ e o sentido contrário:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$$

Componentes. Some componente a componente:

$$\Delta v_x = 0 + (-4) = -4\,\text{m/s}$$

$$\Delta v_y = 3 + 0 = 3\,\text{m/s}$$

Módulo. Aplique o teorema de Pitágoras às componentes:

$$|\Delta\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25}$$

$$|\Delta\vec{v}| = 5\,\text{m/s}$$

Direção. O ângulo é medido em relação ao eixo x negativo, porque Δv_x é negativo:

$$\theta = \arctan\left(\frac{|\Delta v_y|}{|\Delta v_x|}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \approx 36{,}9°$$

Resposta: a variação da velocidade tem módulo 5 m/s e forma um ângulo de aproximadamente 36,9° com a direção horizontal (medido para a esquerda e para cima), ou, equivalentemente, 143,1° com o eixo x positivo.

4 **Avaliar**

Cuidado: $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2| - |\vec{v}_1|$: o módulo da diferença vetorial não é a diferença dos módulos! Em problemas de colisões e impactos, sempre use subtração vetorial para calcular variações. Aqui, novamente, aparece o triângulo 3–4–5.

1.6.5 Produto Escalar

O **produto escalar** (ou produto interno) é uma operação entre dois vetores que resulta em um número real (escalar). É utilizado em Física e Matemática para determinar a projeção de um vetor sobre outro, calcular ângulos entre vetores e diversas outras aplicações.

O exemplo mais comum é o cálculo do trabalho realizado por uma força $\vec{F}$ que atua sobre um objeto que sofre um deslocamento $\vec{d}$.

NOTA

Este conteúdo será aprofundado no cap. 4, Energia e Trabalho.

DEFINIÇÃO 1.9 • Produto Escalar: Trabalho de uma Força

O trabalho W é dado pelo produto escalar entre a força e o deslocamento. O resultado é um número (escalar), e não um vetor.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \tag{1.6}$$

W: trabalho realizado (J = N · m)
$\vec{F}$: força (N)
$\vec{d}$: deslocamento (m)

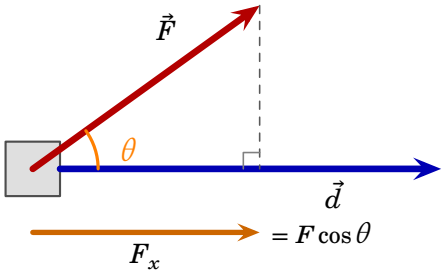


Figura 1.11

No nível médio, a expressão que calcula o trabalho de uma força é apresentada na forma:

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{d}|\cos\theta \tag{1.7}$$

Interpretação geométrica: o produto escalar corresponde à projeção do vetor $\vec{F}$ sobre a direção de $\vec{d}$, multiplicada pelo módulo de $\vec{d}$. O resultado é um número real (escalar), não um vetor.

Interpretação física: o trabalho mede a energia transferida ao objeto pela força na direção em que ocorre o movimento. Por isso, o produto escalar mede apenas o quanto a força contribui efetivamente para o movimento.

1.6.6 Produto Vetorial

O **produto vetorial** é uma operação entre dois vetores que resulta em um novo vetor. É utilizado em Física para calcular grandezas que dependem tanto da magnitude quanto da orientação espacial dos vetores envolvidos. O exemplo mais comum é o cálculo do *torque* de uma força $\vec{F}$ que atua sobre um objeto em uma posição $\vec{r}$ em relação a um eixo de rotação.

DEFINIÇÃO 1.10 • Produto Vetorial: Torque

O torque $\vec{\tau}$ é dado pelo produto vetorial entre o vetor posição e a força. O resultado é um vetor perpendicular ao plano que contém $\vec{r}$ e $\vec{F}$.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{1.8}$$

$\vec{\tau}$: torque (N · m)
$\vec{r}$: vetor posição do ponto de aplicação da força em relação ao eixo de rotação (m)
$\vec{F}$: força (N)

NOTA

Trabalho e torque têm a mesma unidade de base, N · m, mas são grandezas diferentes: o trabalho é escalar e sua unidade recebe o nome joule (J); o torque é vetorial e fica em N · m, para não confundir.

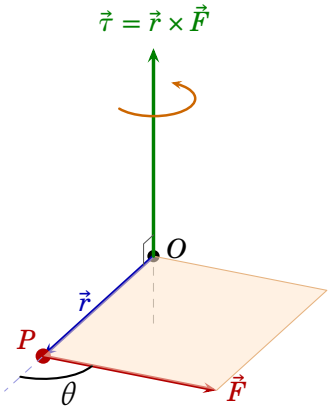


Figura 1.12

NOTA

A **regra da mão direita** para o produto vetorial pode ser aplicada de duas maneiras equivalentes: (i) *regra dos três dedos*, ilustrada ao lado, indicador no sentido de $\vec{r}$, médio no sentido de $\vec{F}$ e polegar indicando $\vec{\tau}$; ou (ii) *regra dos dedos que se curvam*, os dedos apontam no sentido de $\vec{r}$ e se curvam em direção a $\vec{F}$, com o polegar indicando o sentido de $\vec{\tau}$.

O módulo do torque é dado por:

$$|\vec{\tau}| = |\vec{r}|\,|\vec{F}| \operatorname{sen}\theta \tag{1.9}$$

Interpretação geométrica: o módulo do produto vetorial representa a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{F}$. O vetor resultante é perpendicular a esse plano.

Interpretação física: o torque mede a tendência de uma força causar rotação em um objeto. O sentido do vetor $\vec{\tau}$ é dado pela regra da mão direita.

▷ **Regra dos Três Dedos**

(da mão direita)

Indicador: $\vec{r}$

Médio: $\vec{F}$

Polegar: $\vec{\tau}$

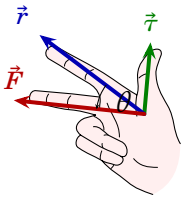


Figura 1.13

Animação interativa:

explore o conceito de torque

NOTA

Este conceito reaparece no cálculo do momento angular, do campo magnético gerado por uma corrente e da força magnética sobre uma carga em movimento (cap. 10).

CAPÍTULO

2

Cinemática

Talvez nada na natureza seja mais antigo que o movimento, sobre o qual os filósofos escreveram livros nem poucos nem pequenos; ainda assim descobri, por experimento, algumas propriedades dele que merecem ser conhecidas.

GALILEU GALILEI

Uma esfera de bronze desce por uma canaleta num plano inclinado, e a água que escorre de um vaso para um copo, pesada depois, marca o tempo. Foi com esse aparato que Galileu mediu o assunto mais velho da filosofia, e o relato está nos *Discursos e Demonstrações Matemáticas sobre Duas Novas Ciências* (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*), o último livro dele, impresso em Leiden em 1638, quando, condenado em 1633, ele vivia em prisão domiciliar em Arcetri. A frase da epígrafe abre a terceira jornada, a que trata do movimento: ninguém o tinha medido, ele mediu, e descobriu que a distância percorrida por um corpo em queda cresce com o quadrado do tempo. É o nascimento da ciência que você vai estudar aqui: um movimento se descreve por posição, velocidade e aceleração, em tabelas, gráficos e equações que saem da experiência, antes de qualquer pergunta sobre as causas.

A **Cinemática** é o ramo da Mecânica que estuda o movimento dos corpos sem se preocupar com suas causas. Ela responde perguntas como: onde está o objeto? Com que velocidade se move? Está acelerando? Para isso, utiliza grandezas como posição, deslocamento, velocidade e aceleração, expressas por equações e gráficos.

Na indústria de petróleo e gás, a cinemática está presente em diversas situações críticas: o controle de velocidade de veículos em refinarias e terminais reduz riscos de acidente; o cálculo da trajetória de objetos em queda é essencial para a segurança em plataformas *offshore*; a velocidade de navios de suporte e helicópteros de resgate é monitorada continuamente em operações emergenciais. Conhecer cinemática é, portanto, um requisito técnico básico para profissionais do setor.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Distinguir movimento de repouso e compreender o papel do referencial;
- Diferenciar distância percorrida de deslocamento;
- Calcular velocidade escalar média e velocidade média;
- Resolver problemas de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU);
- Deduzir do gráfico $v \times t$ as poucas equações que resolvem a cinemática em uma dimensão;
- Analisar queda livre e lançamentos verticais;
- Resolver problemas de lançamento horizontal e oblíquo pelo método de decomposição.

CURIOSIDADE

Galileu Galilei (1564–1642) é considerado o fundador da cinemática moderna. Foi o primeiro a descrever o movimento de corpos em queda por meio de relações matemáticas, descobrindo que todos os corpos caem com a mesma aceleração quando se despreza a resistência do ar, um resultado contraintuitivo para a física aristotélica vigente até então. A citação de abertura deste capítulo é a frase com que ele apresenta, em 1638, o tratado do movimento: o assunto mais antigo da filosofia tratado por experimento.

2.1 Conceitos Iniciais

2.1.1 Movimento e Repouso

Um corpo está em **movimento** quando sua posição varia ao longo do tempo em relação a um **referencial**. Caso contrário, dizemos que está em **repouso**.

O conceito de movimento é **relativo**: um mesmo corpo pode estar em movimento para um observador e em repouso para outro. Um passageiro sentado em um trem está em repouso em relação ao vagão, mas em movimento em relação à plataforma da estação.

DEFINIÇÃO 2.1 • Referencial

Referencial é um sistema de coordenadas (ponto de origem + eixos) usado para descrever a posição de um corpo. A escolha do referencial é arbitrária, mas deve ser mantida durante toda a análise do problema.

DICA

Em concursos, o referencial é geralmente o solo ou um ponto fixo na Terra. Quando o problema envolver dois observadores em movimento relativo, identifique qual referencial foi adotado antes de escrever qualquer equação.

2.1.2 Trajetória

A **trajetória** é o conjunto de posições ocupadas por um corpo ao longo do tempo, para um dado referencial. A forma da trajetória depende do referencial adotado.

Tipos comuns de trajetória:

- **Retilínea**: movimento em linha reta
- **Curvilínea**: movimento em curva (circular, parabólica etc.)

DICA

Se o enunciado disser "trajetória retilínea", você já sabe que todas as equações de MRU ou MRUV se aplicam diretamente, sem necessidade de decomposição vetorial.

2.1.3 Distância Percorrida e Deslocamento

É fundamental distinguir essas duas grandezas:

- **Distância percorrida** (d): grandeza **escalar**, corresponde ao comprimento total do caminho percorrido. É sempre positiva.
- **Deslocamento** ($\Delta\vec{r}$): grandeza **vetorial**, corresponde à variação de posição (posição final menos posição inicial). Pode ser positivo, negativo ou nulo.

> EXEMPLO 2.1 • Distância vs. Deslocamento
>
> Um atleta corre em uma pista retilínea. Adote um eixo x orientado ao longo da pista, com origem no ponto de partida. Ele parte da posição $x_0 = 0$, avança até $x_1 = 100\,\text{m}$ e retorna até $x_2 = 40\,\text{m}$. Determine:
>
> a) A distância total percorrida;
> b) O deslocamento.

1 COMPREENDER

O assunto é **distância percorrida** e **deslocamento**, duas grandezas que só coincidem quando o movimento é retilíneo e sem inversão de sentido.

Objetivo. Obter a distância percorrida d e o deslocamento $\Delta\vec{r}$ do atleta. O que está em jogo é não confundir as duas: a distância soma o comprimento de cada trecho, não importa o sentido, e o deslocamento é só a posição final menos a inicial, de modo que a volta aumenta uma e reduz o outro.

O deslocamento é vetorial, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_0$. Num eixo, cada posição é uma coordenada x, e o deslocamento fica determinado pela sua componente ao longo do eixo, $\Delta x = x_2 - x_0$: o sinal diz o sentido e o módulo diz o tamanho.

2 Organizar

Dados eixo ao longo da pista, origem na partida: posição inicial $x_0 = 0$
ponto de retorno $x_1 = 100\,\text{m}$
posição final $x_2 = 40\,\text{m}$.

Conversões nenhuma: as três posições já estão em metros.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia some os comprimentos da ida e da volta para obter a distância; subtraia a posição inicial da final para obter o deslocamento.

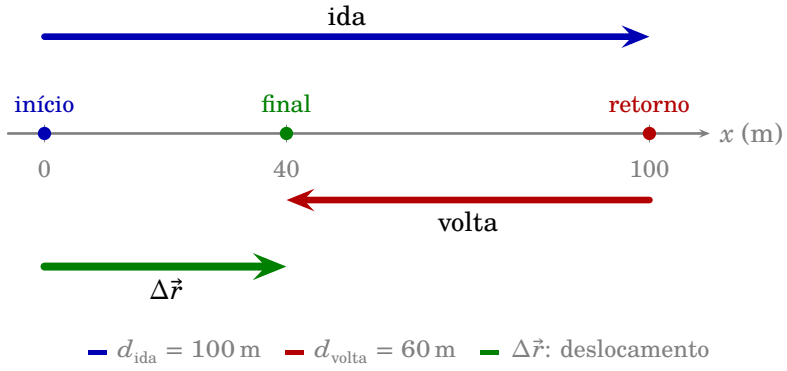


Figura 2.1

3 Resolver

a) Distância percorrida. Some a ida (de 0 a 100 m) com a volta (de 100 m a 40 m):

$$d = 100 + (100 - 40)$$
$$d = 100 + 60$$

$$\boxed{d = 160\,\text{m}}$$

b) Deslocamento. Subtraia a posição inicial da posição final:

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 40 - 0$$

$$\boxed{\Delta x = +40\,\text{m}, \text{ ou seja, } |\Delta\vec{r}| = 40\,\text{m} \text{ no sentido positivo do eixo}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a distância (160 m) é maior que o módulo do deslocamento (40 m), como tem de ser sempre que há inversão de sentido. Se o atleta voltasse ao ponto de partida, o deslocamento seria nulo e a distância, 200 m. Em prova, elimine de imediato qualquer

alternativa em que o módulo do deslocamento supere a distância percorrida.

A distância percorrida é sempre **maior ou igual** ao módulo do deslocamento:

$$d \geq |\Delta \vec{r}|$$

A igualdade ocorre apenas quando o movimento é em linha reta e sem inversão de sentido.

2.1.4 Velocidade

Em Física, **velocidade é uma grandeza vetorial**: tem módulo, direção e sentido. No uso cotidiano, quando dizemos "a velocidade do carro é 80 km/h", estamos nos referindo apenas ao **módulo** desse vetor, o que o jargão escolar brasileiro chama de "velocidade escalar".

Velocidade Escalar Média

DEFINIÇÃO 2.2 • Velocidade Escalar Média

A **velocidade escalar média** é a razão entre a distância percorrida e o intervalo de tempo gasto para percorrê-la. É uma grandeza escalar, sempre positiva.

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \tag{2.1}$$

v_m: velocidade escalar média (m/s)
d: distância percorrida (m)
Δt: intervalo de tempo (s)

Conversão útil: $1\,\text{m/s} = 3{,}6\,\text{km/h}$.

DICA

Para converter km/h em m/s, divida por $3{,}6$. Para o caminho inverso, multiplique por $3{,}6$. Essa conversão aparece em praticamente toda questão de cinemática da Cesgranrio.

NOTA

Em inglês, a Física distingue duas palavras diferentes: **speed** (módulo, grandeza escalar, sempre positiva) e **velocity** (grandeza vetorial). No Brasil, consagrou-se traduzir *speed* como "velocidade escalar" e *velocity* como "velocidade", uma solução que o Halliday (4ª edição, em português) registra explicitamente como herança de tradução. Tecnicamente, a expressão "velocidade escalar" é **contraditória**: velocidade é, por definição, um vetor. Em Portugal e em alguns autores brasileiros (como Moysés Nussenz-

veig no *Curso de Física Básica*), *speed* é traduzido como **rapidez**, terminologia mais coerente. Neste livro, mantemos "velocidade escalar média" por ser o termo consagrado em concursos brasileiros, mas para a grandeza vetorial usamos apenas **velocidade média** ($\vec{v}_m$): o qualificador "vetorial" seria redundante.

Velocidade Média

DEFINIÇÃO 2.3 • Velocidade Média

A **velocidade média** é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo em que ele ocorreu. É uma grandeza vetorial: tem a direção e o sentido do deslocamento.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \tag{2.2}$$

$\vec{v}_m$: velocidade média (m/s)
$\Delta \vec{r}$: deslocamento (m)
Δt: intervalo de tempo (s)

As duas fórmulas acima definem velocidades **médias** (calculadas entre dois instantes de tempo). A **velocidade instantânea** é o valor da velocidade em um único instante, obtida quando Δt tende a zero ($\Delta t \to 0$). No nível médio, identificamos a velocidade instantânea como a inclinação da reta tangente ao gráfico $x \times t$ em um dado ponto. A definição matemática rigorosa, usando limites e derivadas, é estudada no Cálculo Diferencial.

EXEMPLO 2.2 • Velocidade Escalar vs. Velocidade

Um carro percorre um trecho circular de raio $R = 200\,\text{m}$, completando meia volta em 1 min. Determine:

a) A velocidade escalar média;
b) O módulo da velocidade média.

1 Compreender

O assunto é a comparação entre **velocidade escalar média** e **velocidade média**: a primeira usa a distância percorrida, a segunda usa o deslocamento.

Objetivo. Calcular as duas velocidades para a mesma meia volta e o mesmo intervalo de tempo. O que está em jogo é escolher o numerador certo em cada razão: em meia volta, a distância é meio comprimento

de circunferência, πR, e o deslocamento é o diâmetro, $2R$, o segmento reto que liga o ponto inicial ao final.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.2) e diga o que cada símbolo significa. A Equação (2.1) tem a mesma forma, com a distância no lugar do deslocamento: as duas dividem pelo mesmo tempo, e o que muda é o numerador.

2 Organizar

Dados $R = 200\,\text{m}$
$\Delta t = 1\,\text{min}$
$\pi \approx 3{,}14$.

Conversões $\Delta t = 1 \times 60 = 60\,\text{s}$.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia calcule a distância (πR) e o módulo do deslocamento ($2R$), depois divida cada um pelo tempo.

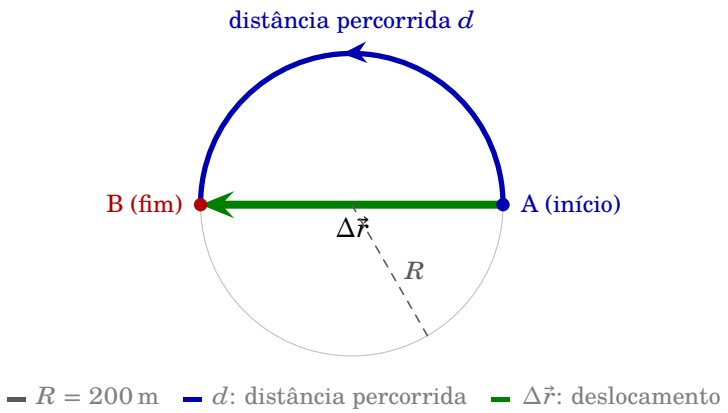


Figura 2.2

3 Resolver

a) Distância percorrida. Calcule meio arco de circunferência:

$$d = \pi R = 3{,}14 \times 200$$
$$d \approx 628\,\text{m}$$

Velocidade escalar média. Divida a distância pelo tempo:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} = \frac{628}{60}$$

$$\boxed{v_m \approx 10{,}5\,\text{m/s}}$$

b) Módulo do deslocamento. É o diâmetro:

$$|\Delta\vec{r}| = 2R = 2 \times 200$$
$$|\Delta\vec{r}| = 400\,\text{m}$$

Velocidade média. Divida o deslocamento pelo tempo:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{400}{60}$$

$$|\vec{v}_m| \approx 6{,}7\,\text{m/s}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a velocidade escalar média (10,5 m/s) supera o módulo da velocidade média (6,7 m/s), e é assim sempre que a trajetória é curva, porque o arco é mais longo que a corda. Aqui a razão entre as duas é $\pi/2 \approx 1{,}57$, qualquer que seja o raio. Em prova, identifique primeiro se o caminho é reto ou curvo: isso decide qual das duas grandezas a questão está pedindo.

A velocidade escalar média é **maior** que o módulo da velocidade média sempre que houver mudança de direção no movimento. Elas só coincidem em trajetórias retilíneas sem inversão de sentido.

EXEMPLO 2.3 • Movimento Relativo

Um trem viaja a 80 km/h em relação aos trilhos. Um passageiro caminha dentro do trem a 5 km/h em relação ao vagão. Qual é a velocidade do passageiro em relação aos trilhos se ele caminha:

a) No mesmo sentido do trem?
b) No sentido contrário ao trem?

1 Compreender

O assunto é a **composição de velocidades**, aplicação direta da adição de vetores do cap. 1.

Objetivo. Obter v_R, a velocidade do passageiro em relação aos trilhos, em cada caso. O que está em jogo é reconhecer que essa velocidade é a soma vetorial da velocidade do trem em relação aos trilhos com a do passageiro em relação ao vagão, e que o sentido em que ele caminha decide se os módulos se somam ou se subtraem.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Como as duas velocidades têm a mesma direção, a soma vetorial vira uma soma algébrica: no mesmo sentido, os módulos se

somam; em sentidos opostos, se subtraem.

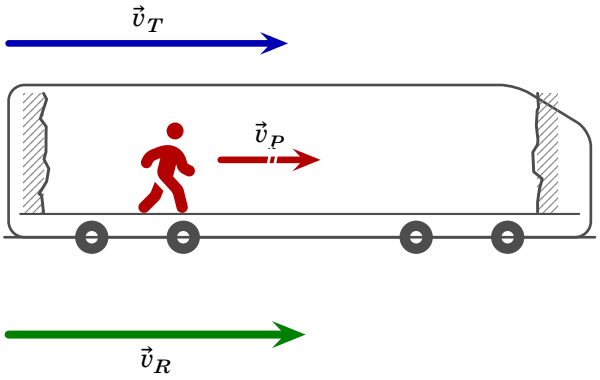
2 Organizar

Dados $v_T = 80\,\text{km/h}$ (trem em relação aos trilhos)
$v_P = 5\,\text{km/h}$ (passageiro em relação ao vagão).

Conversões nenhuma: as duas velocidades estão em km/h, e a resposta pode ficar nessa unidade.

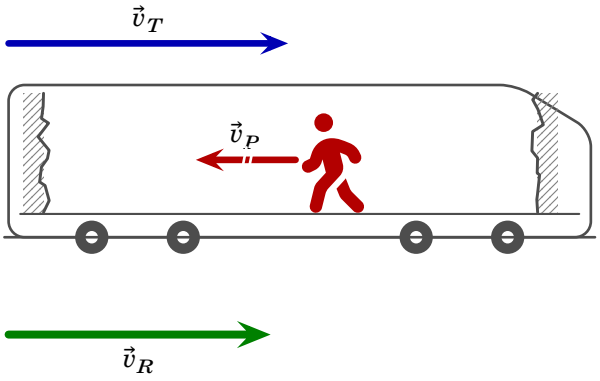
Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia adote o sentido do trem como positivo e some as duas velocidades com os respectivos sinais.



$v_T = 80\,\text{km/h}$ $v_P = 5\,\text{km/h}$ $\vec{v}_R$: resultante
setas em escala; $\vec{v}_P$ ampliado, com marca de ruptura

Figura 2.3



$v_T = 80\,\text{km/h}$ $v_P = 5\,\text{km/h}$ $\vec{v}_R$: resultante
setas em escala; $\vec{v}_P$ ampliado, com marca de ruptura

Figura 2.4

3 Resolver

a) Soma dos módulos. Os sentidos coincidem:

$$v_R = v_T + v_P = 80 + 5$$

$$v_R = 85\,\text{km/h}$$

b) Diferença dos módulos. O passageiro caminha contra o trem:

$$v_R = v_T - v_P = 80 - 5$$

$$v_R = 75\,\text{km/h, ainda no sentido do trem}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: nos dois casos o passageiro avança no sentido do trem, porque 5 km/h a pé não vencem 80 km/h de trem. Ele só ficaria parado em relação aos trilhos se caminhasse contra o trem a 80 km/h. Perceba que não foi preciso converter para m/s: as duas velocidades estão na mesma unidade e a operação é só uma soma ou uma subtração. O mesmo raciocínio vale para um operador que caminha no convés de um navio de apoio em movimento.

A composição de velocidades é uma aplicação direta da **adição de vetores** do Capítulo 1. Quando as velocidades têm a mesma direção, podemos trabalhar apenas com os módulos e sinais.

2.2 Movimento em Uma Dimensão

No movimento em uma dimensão, o corpo se desloca ao longo de uma linha reta. Os dois casos fundamentais são o **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU), com velocidade constante, e o **Movimento Retilíneo Uniformemente Variado** (MRUV), com aceleração constante.

Esta seção tem uma tese, e ela vale para toda a cinemática: descrever um movimento é passar por quatro formas de representação, o esquema da situação, a tabela de posições e instantes, o gráfico que a tabela desenha e a equação que o gráfico revela. Cada equação que você vai encontrar daqui em diante nasce de um gráfico, lido por uma regra única de unidades, e são poucas: cinco equações resolvem a cinemática em uma dimensão, e as mesmas cinco, aplicadas eixo a eixo, resolvem a queda livre e os lançamentos da Seção 2.3. Os resultados que os formulários costumam listar como fórmulas novas, altura máxima, tempo de voo, alcance, aparecem aqui como o que são: consequências de duas ou três linhas das equações gerais.

2.2.1 Movimento Retilíneo Uniforme (MRU)

O **Movimento Retilíneo Uniforme** (MRU) é caracterizado por trajetória retilínea e velocidade constante (em módulo, direção e sentido). Em vez de começar pela equação, comece pela situação e deixe que ela a revele.

Do esquema à equação

Imagine um automóvel numa rodovia. Você zera o cronômetro quando ele passa pelo quilômetro 20 e anota a placa a cada hora: quilômetro 80, depois 140, depois 200. Esse é o **esquema** da situação. Passe-o para uma **tabela**:

t (h)	x (km)
0	20
1	80
2	140
3	200

A cada hora a posição avança 60 km. O móvel percorre distâncias iguais em tempos iguais, e é isso que define o movimento uniforme:

> **DEFINIÇÃO 2.4 • MRU**
>
> No MRU, o móvel percorre **distâncias iguais** em **intervalos de tempo iguais**, com aceleração nula.

Leve agora os pontos da tabela a um par de eixos, tempo na horizontal e posição na vertical, e você obtém o **gráfico** $x \times t$ da figura abaixo. Os quatro pontos caem sobre uma reta, e cada hora a mais sobe a reta os mesmos 60 km.

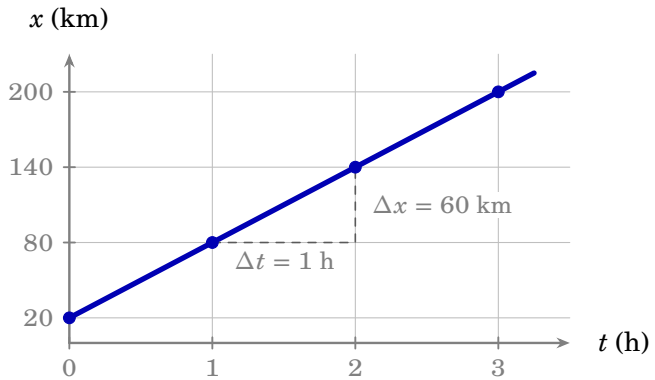


Figura 2.5

Antes de escrever a equação, pergunte o que a inclinação dessa

reta significa. A resposta vem de uma regra que vale para qualquer gráfico deste livro:

> **NOTA**
>
> **Regra da unidade.** Para saber o que a inclinação de um gráfico representa, divida a unidade do eixo vertical pela do eixo horizontal. Para saber o que a área sob o gráfico representa, multiplique as duas. No $x \times t$, km ÷ h dá km/h: a inclinação é a velocidade. No $v \times t$, km/h × h dá km: a área é o deslocamento. Se o quociente ou o produto não for unidade de grandeza nenhuma, aquela inclinação ou aquela área não significa nada.

Aplique a regra ao gráfico. A inclinação, $\Delta x/\Delta t = 60/1 = 60\,\text{km/h}$, é a mesma em qualquer trecho, porque a velocidade não muda. Uma reta é o gráfico de uma função polinomial do primeiro grau, $y = b + a\,t$, com t na horizontal. Troque as letras pelo que cada uma representa aqui: y é a posição x, o coeficiente linear b é a posição inicial x_0, onde a reta corta o eixo vertical, e o coeficiente angular a é a velocidade v. A **equação** do MRU, a função horária da posição, é essa função com os nomes da Física:

$$x = x_0 + v \cdot t \tag{2.3}$$

x: posição no instante t (m)
x_0: posição inicial, em $t = 0$ (m)
v: velocidade, constante (m/s)
t: instante de tempo (s)

Para o automóvel da rodovia, $x = 20 + 60\,t$, com x em km e t em h. Substitua $t = 2$ e a equação devolve o quilômetro 140 da tabela. A figura abaixo generaliza o que a tabela mostrou:

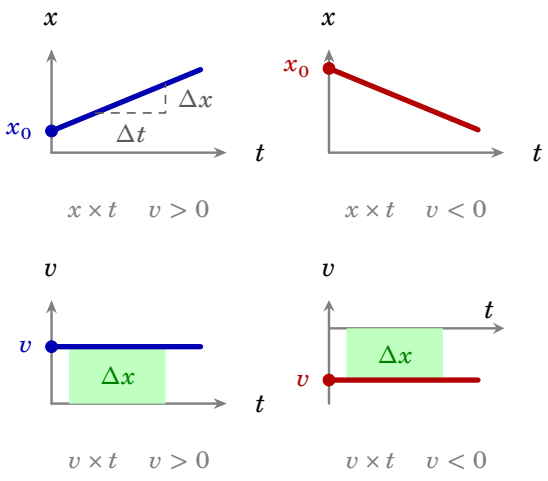


Figura 2.6

O MRU tem dois gráficos, $x \times t$ e $v \times t$, e o sinal da velocidade muda a forma de cada um. Leia os quatro painéis pela regra da unidade. No $x \times t$, a inclinação é a velocidade: reta subindo, $v > 0$ (painel A), e reta descendo, $v < 0$ (painel B), com o móvel andando contra o sentido do eixo. No $v \times t$ (painel C), a reta é horizontal, porque a velocidade não muda, e a área do retângulo sob ela, $v \times \Delta t$, é o deslocamento Δx. Nesse gráfico é a área que interessa, e não a inclinação. Com $v < 0$ (painel D), a reta fica abaixo do eixo t, e a área entre ela e o eixo é um deslocamento negativo.

EXEMPLO 2.4 • MRU: Leitura da Função Horária

A posição de um móvel em MRU é dada por $x = 20 + 5t$ (em SI). Determine:

a) A posição inicial e a velocidade;
b) A posição no instante $t = 4\,\text{s}$;
c) O instante em que o móvel passa pela posição $x = 50\,\text{m}$.

1 Compreender

O assunto é a **função horária do MRU**.

Objetivo. Ler x_0 e v na função dada, depois obter a posição em $t = 4\,\text{s}$ e o instante em que $x = 50\,\text{m}$. O que está em jogo é comparar a função termo a termo com o padrão: a constante é a posição inicial e o coeficiente de t é a velocidade, em qualquer ordem em que os termos apareçam.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.3) e diga o que cada símbolo significa. Para achar a posição em um instante, substitua t; para achar o instante em que o móvel passa por uma posição, resolva uma equação do primeiro grau em t.

2 Organizar

Dados $x = 20 + 5t$, em unidades do SI
padrão $x = x_0 + vt$.

Conversões nenhuma: a função já está em unidades do SI.

Estratégia compare os termos com o padrão, substitua o instante pedido e, no último item, isole t.

3 Resolver

a) Leitura dos coeficientes. Compare com o padrão: a constante 20 ocupa o lugar de x_0 e o coeficiente 5 ocupa o lugar de v:

$$x_0 = 20\,\text{m} \qquad v = 5\,\text{m/s}$$

b) Posição em $t = 4$ s. Substitua $t = 4$ s:

$$x = 20 + 5 \times 4$$

$$\boxed{x = 40\,\text{m}}$$

c) Instante em que $x = 50$ m. Substitua $x = 50$ m e isole t:

$$50 = 20 + 5t$$
$$5t = 30$$

$$\boxed{t = 6\,\text{s}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a 5 m/s, o móvel avança 30 m em 6 s, exatamente a diferença entre 50 m e 20 m. Em prova, a função pode vir com outros símbolos ($s = s_0 + vt$) ou com os termos em outra ordem ($x = 5t + 20$): identifique cada termo pelo papel que ele faz, não pela letra. **Cuidado com a pegadinha:** se a função vier como $x = 20 - 5t$, o sinal negativo diz que o móvel anda contra o sentido do eixo; a posição inicial continua sendo 20 m.

> **EXEMPLO 2.5** • Encontro de Móveis em MRU
>
> Duas cidades estão a 200 km de distância. Um carro A parte da cidade 1 a 80 km/h e um carro B parte da cidade 2 a 120 km/h, ambos ao mesmo tempo, um em direção ao outro. Determine:
>
> a) O tempo até o encontro;
> b) A posição do encontro em relação à cidade 1.

1 Compreender

O assunto é o **encontro de dois móveis em MRU**.

Objetivo. Obter o instante do encontro e a posição em que ele acontece, medida a partir da cidade 1. O que está em jogo é escrever as duas funções horárias no mesmo referencial, com o sinal certo em cada velocidade, porque encontrar-se é ocupar a mesma posição no mesmo instante, $x_A = x_B$.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.3) e diga o que cada símbolo significa. Escolha a origem na cidade 1 e o sentido positivo de 1 para 2. O carro A parte da origem com velocidade positiva; o carro B parte de 200 km com velocidade negativa, porque anda contra o eixo.

2 Organizar

Dados $D = 200\,\text{km}$
$x_{0A} = 0$ e $v_A = +80\,\text{km/h}$
$x_{0B} = 200\,\text{km}$ e $v_B = -120\,\text{km/h}$.

Conversões nenhuma: distância em km e velocidades em km/h dão o tempo em horas, que é a unidade natural da resposta.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia escreva $x_A(t)$ e $x_B(t)$, iguale as duas, isole t e substitua em uma delas.

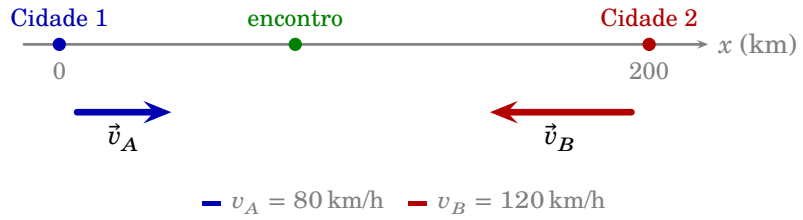


Figura 2.7

3 Resolver

Funções horárias. Escreva as duas no referencial escolhido:

$$x_A = 80\,t$$
$$x_B = 200 - 120\,t$$

a) Condição de encontro. Iguale as posições e isole t:

$$80\,t = 200 - 120\,t$$
$$200\,t = 200$$

$$\boxed{t = 1\,\text{h}}$$

b) Posição do encontro. Substitua $t = 1\,\text{h}$ na função de A:

$$x_A = 80 \times 1$$

$$\boxed{x_A = 80\,\text{km}}$$

Confira na função de B: $x_B = 200 - 120 \times 1 = 80\,\text{km}$.

4 Avaliar

Avalie a coerência: em 1 h, A percorre 80 km e B percorre 120 km; juntos, 200 km, a distância inicial. Perceba o atalho: quando dois móveis andam em sentidos opostos, a velocidade de aproximação é a soma dos módulos, 200 km/h, e o tempo até o encontro é a distância

dividida por ela, $200/200 = 1\,\text{h}$. Para a posição, substitua esse tempo em qualquer uma das funções horárias.

EXEMPLO 2.6 • Ultrapassagem em MRU

Um caminhão de 20 m de comprimento trafega a 72 km/h. Um carro de 5 m de comprimento viaja a 90 km/h na mesma faixa, atrás do caminhão. Quanto tempo o carro leva para ultrapassar completamente o caminhão?

NOTA

A velocidade de aproximação entre dois móveis em sentidos opostos é a soma dos módulos: $v_{\text{rel}} = |v_A| + |v_B|$. Quando se movem no mesmo sentido, a velocidade de aproximação é a diferença dos módulos.

1 Compreender

O assunto é a **velocidade relativa** entre dois móveis em MRU no mesmo sentido.

Objetivo. Obter o tempo que o carro leva para ultrapassar o caminhão por completo. O que está em jogo é ver a ultrapassagem do referencial do caminhão: "ultrapassar completamente" começa com a frente do carro alinhada à traseira do caminhão e termina com a traseira do carro alinhada à frente dele, então o carro precisa ganhar, em relação ao caminhão, a soma dos dois comprimentos.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.3) e diga o que cada símbolo significa. Visto do caminhão, o carro faz um MRU com a velocidade relativa, que é a diferença entre as duas velocidades porque os dois andam no mesmo sentido.

2 Organizar

Dados $L_{\text{caminhão}} = 20\,\text{m}$ e $v_{\text{caminhão}} = 72\,\text{km/h}$
$L_{\text{carro}} = 5\,\text{m}$ e $v_{\text{carro}} = 90\,\text{km/h}$.

Conversões $v_{\text{caminhão}} = 72/3{,}6 = 20\,\text{m/s}$
$v_{\text{carro}} = 90/3{,}6 = 25\,\text{m/s}$.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia calcule a velocidade relativa e a distância relativa, e divida uma pela outra.

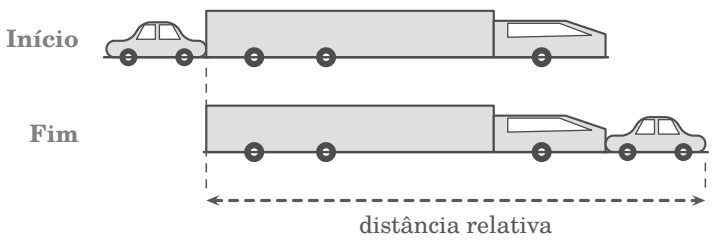


Figura 2.8

3 **Resolver**

Velocidade relativa. É a do carro em relação ao caminhão:

$$v_{\text{rel}} = 25 - 20$$
$$v_{\text{rel}} = 5\,\text{m/s}$$

Distância relativa. É a soma dos comprimentos:

$$d = 5 + 20$$
$$d = 25\,\text{m}$$

Tempo de ultrapassagem. Divida a distância relativa pela velocidade relativa:

$$t = \frac{d}{v_{\text{rel}}} = \frac{25}{5}$$

$$t = 5\,\text{s}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: em 5 s o carro anda 125 m e o caminhão anda 100 m; a diferença é 25 m, a soma dos comprimentos. Fecha. Na estrada de acesso a um terminal, é esse tempo, e a distância correspondente, que define se há espaço para ultrapassar uma carreta com segurança. **Cuidado com a pegadinha:** sem os comprimentos, o enunciado só pode pedir o tempo para a frente do carro alcançar a frente do caminhão, que é outra situação. E quem esquece de converter km/h em m/s mistura unidades e erra por um fator 3,6.

Em problemas de ultrapassagem, sempre considere os **comprimentos** dos veículos. A distância relativa total é a soma dos comprimentos quando um ultrapassa o outro por completo.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014
Um ônibus e um carro partem simultaneamente do início de uma estrada de 120 km. Ambos trafegam com velocidade constante. O carro e o ônibus demoram, respectivamente, 1,50 h e 2,00 h para chegar ao fim da estrada.
Quando o carro tiver percorrido os primeiros 100 km na estrada, qual a distância, em km, que o separa do ônibus?

(A) 25,0
(B) 33,0
(C) 60,0
(D) 75,0
(E) 80,0

H8TVG7

2.2.2 Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (MRUV)

O **Movimento Retilíneo Uniformemente Variado** (MRUV) é caracterizado por trajetória retilínea e **aceleração** constante e não nula.

DEFINIÇÃO 2.5 • Aceleração

A **aceleração** mede a taxa de variação da velocidade em relação ao tempo: quanto a velocidade muda a cada segundo. Sua unidade no SI é o metro por segundo ao quadrado (m/s^2).

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t} \tag{2.4}$$

a: aceleração média (m/s^2)
$\Delta v = v - v_0$: variação da velocidade no intervalo (m/s)
$\Delta t = t$: intervalo de tempo, contado a partir de $t_0 = 0$ (s)

A aceleração é, em geral, uma grandeza **vetorial** ($\vec{a}$). Em problemas unidimensionais, trabalhamos apenas com o sinal algébrico do valor escalar, pois a direção já está fixada pelo eixo escolhido. Em duas ou três dimensões (lançamentos oblíquos, movimentos circulares), será necessário decompor $\vec{a}$ em componentes, como faremos na Seção 2.3.

A partir da natureza vetorial da aceleração, classificamos o movimento em 1D pelos sinais de v e a:

- **Movimento acelerado**: v e a têm o **mesmo sinal**: o módulo da velocidade aumenta (o vetor aceleração aponta no sentido do movimento).
- **Movimento retardado**: v e a têm **sinais opostos**: o módulo da velocidade diminui (o vetor aceleração aponta contra o movimento).

Do gráfico às cinco equações

Repita para o MRUV o caminho do MRU. O esquema agora é um carro de teste que parte do repouso e ganha 5 m/s a cada segundo. A tabela registra a velocidade ao fim de cada segundo:

t (s)	0	1	2	3	4	5
v (m/s)	0	5	10	15	20	25

Como a velocidade cresce a mesma quantidade a cada segundo, o gráfico $v \times t$ é uma reta, o painel A da figura abaixo. A regra da unidade diz o que ler nela: m/s ÷ s dá m/s^2, então a inclinação é a aceleração, a grandeza que acabamos de definir; e m/s × s dá m, então a área sob a reta é o deslocamento. Dessas duas leituras saem todas as equações do MRUV.

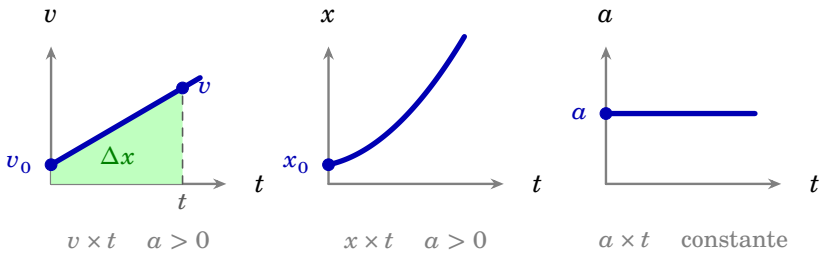


Figura 2.9

1. A inclinação dá a função da velocidade. A reta parte de v_0 e sobe com inclinação a. Como no MRU, é uma função polinomial do primeiro grau, agora com v no lugar de x e a no lugar de v:

$$v = v_0 + a\,t \tag{2.5}$$

2. A área dá a função da posição. Entre 0 e t, a área sob a reta é o trapézio sombreado no painel A, de bases v_0 e v e altura t. Escreva a área, substitua v pela função da velocidade e organize:

$$\Delta x = \frac{(v_0 + v)\,t}{2}$$
$$\Delta x = \frac{(v_0 + v_0 + a\,t)\,t}{2} = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

$$x = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \tag{2.6}$$

É uma função polinomial do segundo grau em t, e por isso o gráfico $x \times t$ do MRUV é uma parábola (painel B). Perceba que o coeficiente de t^2 é $a/2$, e não a: quando a função vier pronta no enunciado, a aceleração é o dobro do número que multiplica t^2. No painel B a inclinação da reta tangente em cada ponto é a velocidade naquele instante, e a área sob a parábola, m × s, não é unidade de grandeza nenhuma e não significa nada.

3. Eliminar o tempo dá a equação de Torricelli. Isole t na função da velocidade, $t = (v - v_0)/a$, e substitua na área do trapézio:

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \frac{v - v_0}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x \tag{2.7}$$

4. A área do trapézio, sozinha, é a equação da velocidade média. Divida por t a primeira linha do passo 2 e ela diz que, no MRUV, a velocidade média é a média aritmética entre a velocidade inicial e a final:

$$\frac{\Delta x}{t} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{2.8}$$

É a equação auxiliar para o problema que dá v_0, v e t e pede o deslocamento, sem passar pela aceleração.

5. O MRU é o caso particular sem aceleração. Faça $a = 0$ na função da posição e ela vira $x = x_0 + v_0\,t$, a equação do MRU. A função da velocidade diz que v não muda, e as duas auxiliares deixam de ser necessárias. O painel C fecha a leitura: no $a \times t$ a reta é horizontal, e a área sob ela, m/s^2 × s, é a variação de velocidade Δv.

Com a do MRU, são **cinco equações** para toda a cinemática em uma dimensão. O quadro abaixo as reúne, na ordem do simulador do site. Aponte a câmera para o QR code da margem e veja as quatro primeiras mudarem de valor enquanto o carro anda.

CURIOSIDADE

A equação que relaciona velocidade, aceleração e deslocamento sem depender explicitamente do tempo leva o nome do físico e matemático italiano Evangelista Torricelli, discípulo de Galileu. Torricelli também é reconhecido por ter inventado o barômetro de mercúrio e estudado o escoamento de fluidos, tema que retornará no cap. 5 com o Teorema de Torricelli (homônimo, mas distinto).

DICA

A equação de Torricelli é especialmente útil quando o **tempo não é dado** nem pedido no problema, pois relaciona velocidade, aceleração e deslocamento diretamente.

simulador Movimento Retilíneo

lab.fisicainterativa.com

CINEMÁTICA EM 5 EQUAÇÕES

ACELERAÇÃO CONSTANTE

(2.5) $v = v_0 + a\,t$

(2.6) $x = x_0 + v_0\,t + {}^1\!/_2\,a\,t^2$

EQUAÇÕES AUXILIARES (SE $a \neq 0$)

(2.7) $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x$

(2.8) $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{v + v_0}{2}$

ACELERAÇÃO NULA: O MRU É CASO PARTICULAR

(2.3) $x = x_0 + v\,t$

Faça $a = 0$: (2.6) vira (2.3), (2.5) diz que v não muda, e (2.7) e (2.8) deixam de ser necessárias.

EXEMPLO 2.7 • MRUV: Frenagem de Veículo

Um carro trafega a 72 km/h quando o motorista avista um obstáculo e freia. A desaceleração é de $5\,\text{m/s}^2$. Calcule:

a) O tempo para o carro parar;
b) A distância percorrida até parar.

1 Compreender

O assunto é o **MRUV retardado**: velocidade e aceleração têm sinais opostos e o módulo da velocidade diminui até zero.

Objetivo. Obter o tempo e a distância de frenagem até o carro parar. O que está em jogo é o sinal da aceleração, que numa frenagem é contrário ao da velocidade, e a condição de parada, $v = 0$, que é o que se leva às equações.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.5) e diga o que cada símbolo significa. O tempo sai dela; a distância sai da Equação (2.7), que dispensa o tempo. A velocidade precisa estar em m/s, porque a aceleração está em m/s^2.

2 Organizar

Dados $v_0 = 72\,\text{km/h}$
$v = 0$
$a = -5\,\text{m/s}^2$, com o sentido positivo no sentido do movimento.

Conversões $v_0 = 72/3{,}6 = 20\,\text{m/s}$.

Estratégia use $v = v_0 + at$ para o tempo e $v^2 = v_0^2 + 2a\,\Delta x$ para a distância.

3 **Resolver**

a) Condição de parada na função da velocidade. Substitua $v = 0$ e isole t:

$$0 = 20 - 5\,t$$
$$5\,t = 20$$

$$\boxed{t = 4\,\text{s}}$$

b) Condição de parada em Torricelli. Substitua $v = 0$ e isole Δx:

$$0 = 20^2 + 2 \times (-5) \times \Delta x$$
$$0 = 400 - 10\,\Delta x$$

$$\boxed{\Delta x = 40\,\text{m}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: pela equação da velocidade média, a frenagem acontece a $(20 + 0)/2 = 10\,\text{m/s}$, e em $4\,\text{s}$ isso dá $40\,\text{m}$. Fecha. São cerca de dez carros enfileirados, o que ajuda a entender por que as vias internas de refinarias e terminais têm limites de velocidade tão baixos. **Cuidado com a pegadinha:** quem usa $a = +5\,\text{m/s}^2$ encontra tempo negativo ou distância negativa; a aceleração de uma frenagem tem sinal contrário ao da velocidade.

DICA

A distância de frenagem é proporcional ao **quadrado** da velocidade. Se a velocidade dobrar, a distância de frenagem **quadruplica**. Esse é tema recorrente em questões de segurança no trânsito.

EXEMPLO 2.8 • MRUV: Análise de Gráfico $v \times t$

O gráfico abaixo mostra a velocidade de um móvel em função do tempo.

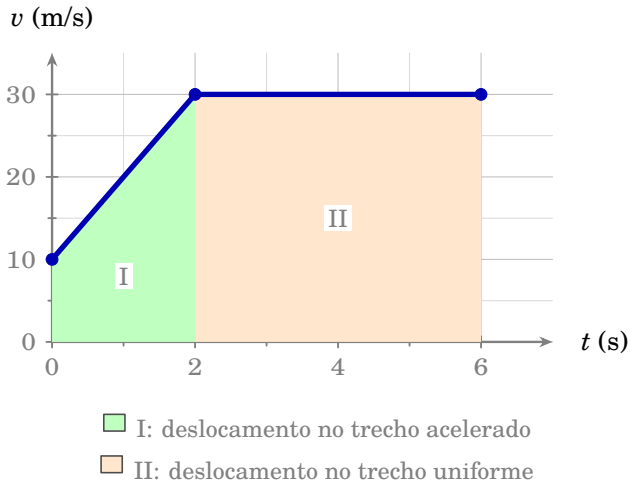


Figura 2.10

Determine:

a) A aceleração em cada trecho;
b) O deslocamento total.

1 Compreender

O assunto é a leitura de **gráfico** $v \times t$ pela regra da unidade: a inclinação de cada trecho é a aceleração, e a área entre a reta e o eixo dos tempos é o deslocamento.

Objetivo. Obter a aceleração de cada trecho e o deslocamento total. O que está em jogo é reconhecer o tipo de movimento em cada trecho pela forma da reta, e lembrar que a área do trecho I é um trapézio, porque a velocidade não parte de zero.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.4) e diga o que cada símbolo significa. O trecho I (de 0 a 2 s) é uma reta inclinada, um MRUV; o trecho II (de 2 s a 6 s) é uma reta horizontal, um MRU. As áreas são um trapézio e um retângulo.

2 Organizar

Dados lidos do gráfico: trecho I, v vai de 10 m/s a 30 m/s entre $t = 0$ e $t = 2$ s
trecho II, $v = 30$ m/s constante de $t = 2$ s a $t = 6$ s.

Conversões nenhuma: os eixos do gráfico já estão em m/s e em s.

Estratégia divida Δv por Δt em cada trecho; some a área do trapézio com a do retângulo.

3 **Resolver**

a) Inclinação de cada trecho. Calcule a inclinação do trecho I:

$$a_{\mathrm{I}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{30 - 10}{2 - 0}$$

$$\boxed{a_{\mathrm{I}} = 10\,\mathrm{m/s^2}}$$

No trecho II a velocidade é constante, então a inclinação é nula:

$$\boxed{a_{\mathrm{II}} = 0}$$

b) Área do trapézio. Bases 10 e 30 m/s e altura 2 s:

$$A_{\mathrm{I}} = \frac{(10 + 30) \times 2}{2}$$
$$A_{\mathrm{I}} = 40\,\mathrm{m}$$

Área do retângulo. Base 4 s e altura 30 m/s:

$$A_{\mathrm{II}} = 30 \times 4$$
$$A_{\mathrm{II}} = 120\,\mathrm{m}$$

Deslocamento total. Some as duas áreas:

$$\Delta x = 40 + 120$$

$$\boxed{\Delta x = 160\,\mathrm{m}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: no trecho II o móvel anda a 30 m/s por 4 s, 120 m; no trecho I a velocidade média é 20 m/s por 2 s, 40 m. Fecha. A área sob o gráfico é o caminho mais direto para o deslocamento, qualquer que seja o tipo de movimento. **Cuidado com a pegadinha:** quem trata a área do trecho I como um triângulo esquece que a velocidade inicial é 10 m/s, não zero, e encontra 20 m em vez de 40 m.

> **EXEMPLO 2.9** • MRUV: Partida de Veículo
>
> Um carro parte do repouso e acelera uniformemente a $2\,\mathrm{m/s^2}$ durante 10 segundos. Em seguida, mantém velocidade constante por mais 20 segundos. Qual a distância total percorrida?

DICA

Ao ler qualquer gráfico em uma prova, sempre comece pelos eixos: que grandezas eles representam, em que unidades, com que escala? Um erro de leitura de eixo vale o problema inteiro, e é um dos equívocos mais comuns em questões de cinemática da Cesgranrio.

1 **Compreender**

O assunto é o **movimento em dois trechos**: um MRUV, a fase de aceleração, e um MRU, a fase de velocidade constante.

Objetivo. Obter a distância total percorrida nos dois trechos. O que está em jogo é perceber que a velocidade ao final do primeiro trecho é a velocidade constante do segundo, e que cada trecho tem a própria duração, contada do seu início.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.6) e diga o que cada símbolo significa. Ela dá a distância do primeiro trecho; a Equação (2.5) dá a velocidade com que ele termina, e a Equação (2.3) dá a distância do segundo.

2 **Organizar**

Dados trecho 1, $v_0 = 0$, $a = 2\,\text{m/s}^2$ e $t_1 = 10\,\text{s}$
trecho 2, $v = v_1$ e $t_2 = 20\,\text{s}$.

Conversões nenhuma: aceleração em m/s^2 e tempos em segundos.

Estratégia use a função horária da velocidade para obter v_1, a função horária da posição para d_1 e o MRU para d_2.

3 **Resolver**

Velocidade ao fim do trecho 1. Pela função da velocidade:

$$v_1 = 0 + 2 \times 10$$
$$v_1 = 20\,\text{m/s}$$

Distância do trecho 1. Pela função da posição, com $v_0 = 0$:

$$d_1 = 0 + \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2$$
$$d_1 = 100\,\text{m}$$

Distância do trecho 2. Em MRU, com a velocidade que o trecho 1 deixou:

$$d_2 = 20 \times 20$$
$$d_2 = 400\,\text{m}$$

Distância total. Some as duas:

$$d = 100 + 400$$

$$\boxed{d = 500\,\text{m}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: no trecho 1 a equação da velocidade média dá $(0+20)/2 = 10\,\text{m/s}$ durante 10 s, 100 m. Fecha. Pelo gráfico $v \times t$ você chega ao mesmo: um triângulo de área $^1/_2 \times 10 \times 20 = 100\,\text{m}$ e um retângulo de $20 \times 20 = 400\,\text{m}$. **Cuidado com a pegadinha:** os 20 segundos do segundo trecho são a duração daquele trecho, não o instante final (30 s); quem substitui $t = 30\,\text{s}$ na equação do MRUV erra.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação (Dutos e Terminais), 2023

Um carrinho utilizado na movimentação de cargas em um armazém é puxado do repouso até uma velocidade de 2,0 m/s em 4 segundos e com movimento uniformemente variado.

A distância, em metros, percorrida pelo carrinho durante esse tempo é

(A) 2
(B) 4
(C) 6
(D) 8
(E) 10

78369B

2.2.3 Queda Livre e Lançamento Vertical

Queda Livre

DEFINIÇÃO 2.6 • Queda Livre (sentido físico rigoroso)

Um corpo está em **queda livre** quando se move sob ação **exclusiva** da gravidade, desprezando-se a resistência do ar. O corpo pode partir do repouso ou com velocidade inicial em qualquer direção, o que caracteriza a queda livre não é a trajetória, mas a *única força atuante* ser o peso.

NOTA

No uso escolar brasileiro, o termo "queda livre" é frequentemente reservado ao caso em que o corpo parte do **repouso** ($v_0 = 0$) e cai verticalmente. Neste livro, adotaremos essa convenção quando falarmos "queda livre" sem qualificação. O lançamento vertical (próxima subseção) é, tecnicamente, também uma queda livre no

sentido rigoroso, pois a única força atuante é o peso.

Nas condições dos concursos, portanto, o corpo parte do repouso, $v_0 = 0$, a aceleração é a **aceleração da gravidade**, $g \approx 9{,}8\,\text{m/s}^2$, que os problemas arredondam para $g = 10\,\text{m/s}^2$, e a resistência do ar é desprezada. A resistência do ar depende da forma, do tamanho, da massa e da velocidade do corpo, tornando o problema matemático muito mais complexo. Em concursos de nível médio, essa idealização é padrão. Fora da escola, porém, a resistência do ar é decisiva: é por causa dela que um paraquedista atinge uma velocidade terminal constante em vez de acelerar indefinidamente, e é por isso que uma pena cai muito mais devagar que uma bola de chumbo no ar, apesar de, no vácuo, caírem juntas (experiência feita pelos astronautas da Apollo 15 na Lua em 1971).

A queda livre dispensa equação nova. Tome as quatro equações do MRUV, oriente o eixo para baixo, no sentido do movimento, e faça $v_0 = 0$ e $a = g$. Chamando de h a altura já percorrida, o deslocamento Δx vira h e elas ficam:

$$
\begin{aligned}
v &= g\,t \\
h &= \frac{1}{2} g\,t^2 \\
v^2 &= 2\,g\,h \\
\frac{h}{t} &= \frac{v}{2}
\end{aligned}
$$

São as mesmas equações com dois valores substituídos. Quem as decora como fórmulas à parte erra no dia em que o corpo é lançado para baixo com velocidade inicial, porque aí o termo em v_0 volta.

EXEMPLO 2.10 • Queda Livre: Tempo e Velocidade

Uma pedra é abandonada do alto de um prédio de 45 m de altura. Adotando $g = 10\,\text{m/s}^2$, determine:

a) O tempo de queda;
b) A velocidade ao atingir o solo.

1 Compreender

O assunto é a **queda livre** a partir do repouso: um MRUV com $v_0 = 0$ e $a = g$, no eixo orientado para baixo.

Objetivo. Obter o tempo de queda e a velocidade com que a pedra chega ao solo. O que está em jogo é usar as equações do MRUV com $v_0 = 0$ e $a = g$, sem fórmula nova: a queda livre é caso particular, não capítulo à parte.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.6) e diga o que cada símbolo significa. Com $v_0 = 0$ ela vira $h = {}^1/_2 g t^2$ e dá o tempo. A velocidade ao chegar ao solo sai da Equação (2.5), $v = gt$, ou da Equação (2.7), $v^2 = 2gh$, e uma serve para conferir a outra.

2 Organizar

Dados $h = 45\,\text{m}$
$v_0 = 0$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: altura em metros e g em m/s^2.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia isole t na função da posição com $v_0 = 0$; depois substitua na função da velocidade.

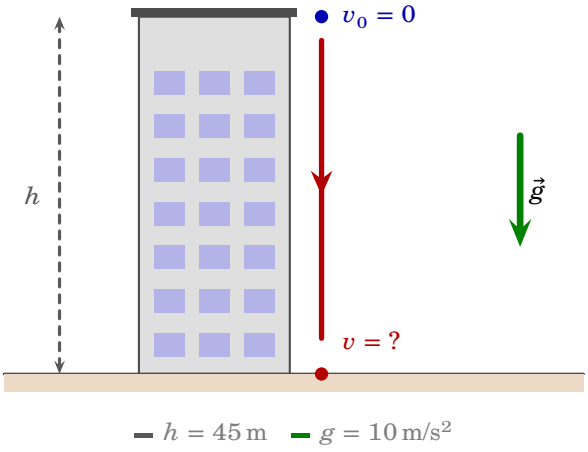


Figura 2.11

3 Resolver

a) Tempo de queda. Substitua os dados na equação da altura e isole t:

$$45 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2$$
$$45 = 5\,t^2$$
$$t^2 = 9$$

$$\boxed{t = 3\,\text{s}}$$

b) Velocidade no solo. Substitua o tempo na equação da velocidade:

$$v = 10 \times 3$$

$$\boxed{v = 30\,\text{m/s}}$$

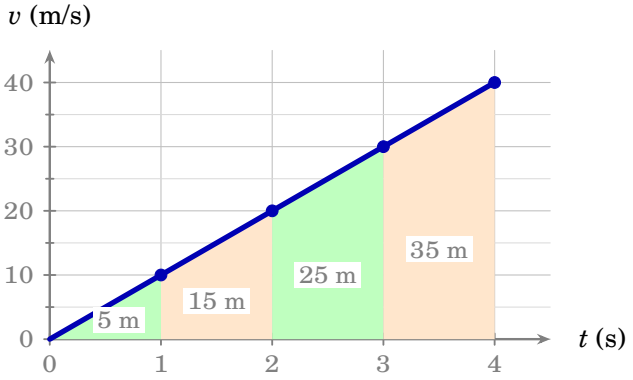
Confira por Torricelli: $v^2 = 2 \times 10 \times 45 = 900$, e $\sqrt{900} = 30\,\text{m/s}$.

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 30 m/s são 108 km/h, a velocidade de um carro em rodovia, o que dá a medida do perigo de um objeto caindo de 45 m, mais ou menos a altura de um prédio de 15 andares. Em plataformas, por isso, a queda de objetos é tratada como risco grave e as ferramentas usadas em altura são amarradas. Perceba que, com $g = 10\,\text{m/s}^2$, vale $h = 5t^2$: alturas de 5, 20, 45 e 80 m dão tempos inteiros de 1, 2, 3 e 4 s, e a banca escolhe esses valores para a conta fechar.

A regra dos ímpares de Galileu

Galileu não tinha as equações acima, e chegou à queda livre pela geometria do gráfico. Construa o $v \times t$ de um corpo abandonado do repouso com $g = 10\,\text{m/s}^2$: a velocidade vale 10, 20, 30 e 40 m/s ao fim de cada segundo. A área sob a reta é a distância caída, e fatiada em segundos ela dá um triângulo e três trapézios.



cada faixa é a distância caída em um segundo; as cores só alternam

Figura 2.12

No primeiro segundo o corpo cai 5 m, a área do triângulo. No segundo, 15 m, três vezes isso. No terceiro, 25 m, e no quarto, 35 m. As distâncias caídas em segundos sucessivos são proporcionais aos números ímpares, 1, 3, 5, 7, e as distâncias acumuladas, 5, 20, 45 e 80 m, são $5t^2$. A regra vale apenas quando o corpo parte do repouso, e serve para ler distâncias de cabeça: uma questão que pergunta quanto o corpo cai no terceiro segundo se responde com $5 \times 5 = 25$ m, sem equação.

Lançamento Vertical

No **lançamento vertical**, o corpo é arremessado com velocidade inicial v_0 na direção vertical. O caso mais frequente em provas é o lançamento para cima, e ele também dispensa equação nova. Oriente

o eixo para cima, no sentido do lançamento, de modo que $a = -g$: a velocidade diminui g a cada segundo, zera no ponto mais alto e depois cresce para baixo. O que a prova pergunta sobre esse movimento sai dessa condição, $v = 0$ no ponto mais alto, em três linhas. Faça isso na função da velocidade e em Torricelli, e use a simetria para o tempo total:

$$t_{\text{subida}} = \frac{v_0}{g} \qquad (0 = v_0 - g\,t_{\text{subida}})$$

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (0 = v_0^2 - 2g\,h_{\text{máx}})$$

$$t_{\text{total}} = 2\,t_{\text{subida}} = \frac{2\,v_0}{g} \qquad \text{(subida e descida iguais)}$$

A simetria vem da própria aceleração constante: a descida refaz a subida ao contrário, no mesmo tempo, e Torricelli com deslocamento nulo diz que o corpo volta ao ponto de lançamento com o mesmo módulo de velocidade, v_0, agora para baixo. Os três resultados valem para o lançamento que volta ao nível de partida. Você os encontra no resumo interativo do capítulo e pode usá-los direto na prova, mas repare que cada um custou uma linha das equações gerais.

A figura abaixo mostra o movimento nos dois painéis. À esquerda, o corpo em quatro instantes, com a velocidade nascendo nele: a seta encolhe na subida, some no ponto mais alto e cresce na descida até o módulo de partida. À direita, o gráfico $h \times t$, uma parábola cujo vértice é o ponto mais alto, onde a tangente é horizontal porque a velocidade é zero.

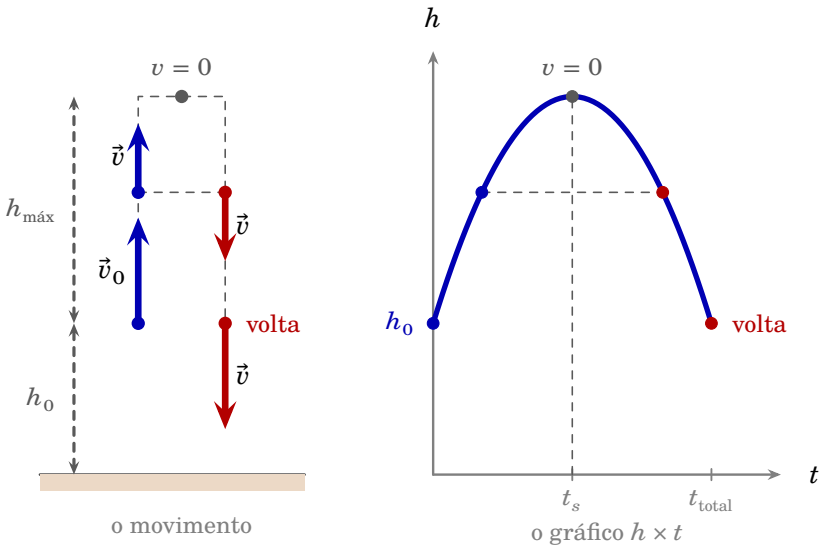


Figura 2.13

EXEMPLO 2.11 • Lançamento Vertical para Cima

Uma bola é lançada verticalmente para cima com velocidade de $20\,\text{m/s}$. Adotando $g = 10\,\text{m/s}^2$, determine:

a) A altura máxima atingida;
b) O tempo de subida;
c) O tempo total de voo (até retornar ao ponto de lançamento).

1 Compreender

O assunto é o **lançamento vertical para cima**: um MRUV com $a = -g$ no eixo orientado para cima.

Objetivo. Obter a altura máxima, o tempo de subida e o tempo total de voo. O que está em jogo é a condição do ponto mais alto, $v = 0$, que é o que se leva às equações, e a simetria entre subida e descida, que dobra o tempo.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.7) e diga o que cada símbolo significa. Com $v = 0$ ela dá a altura máxima; a Equação (2.5), com a mesma condição, dá o tempo de subida. Pela simetria do movimento, o tempo total de voo é o dobro do tempo de subida.

2 Organizar

Dados $v_0 = 20\,\text{m/s}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
eixo para cima, logo $a = -10\,\text{m/s}^2$
no ponto mais alto, $v = 0$.

Conversões nenhuma: velocidade em m/s e g em m/s^2.

Estratégia Torricelli com $v = 0$ para a altura; $v = v_0 - gt$ com $v = 0$ para o tempo de subida; depois $t_{\text{total}} = 2\,t_s$.

3 Resolver

a) Ponto mais alto em Torricelli. Substitua $v = 0$ e isole $h_{\text{máx}}$:

$$0 = 20^2 - 2 \times 10 \times h_{\text{máx}}$$
$$20\,h_{\text{máx}} = 400$$

$$\boxed{h_{\text{máx}} = 20\,\text{m}}$$

b) Ponto mais alto na função da velocidade. Substitua $v = 0$ e isole t_s:

$$0 = 20 - 10\,t_s$$

$$t_s = 2\,\text{s}$$

c) Simetria. Dobre o tempo de subida:

$$t_{\text{total}} = 2 \times 2$$

$$t_{\text{total}} = 4\,\text{s}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a bola perde 10 m/s a cada segundo, então zera em 2 s; a velocidade média na subida é 10 m/s, e em 2 s isso dá 20 m. Fecha. Os resultados deduzidos acima, $h_{\text{máx}} = v_0^2/(2g)$ e $t_{\text{total}} = 2v_0/g$, dão o mesmo de uma vez. **Cuidado com a pegadinha:** "tempo de voo" é o tempo total (4 s), não o de subida; e a bola volta ao ponto de lançamento com 20 m/s, agora para baixo.

> **EXEMPLO 2.12** • Encontro de Objetos em Lançamento Vertical
>
> Do alto de um prédio de 80 m, uma pedra A é abandonada. No mesmo instante, uma pedra B é lançada verticalmente para cima do solo com velocidade de 40 m/s. Quando e onde as pedras se encontram? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

1 Compreender

O assunto é o encontro de dois corpos, um em **queda livre** e outro em **lançamento vertical**.

Objetivo. Obter o instante e a altura em que as duas pedras se encontram. O que está em jogo é escrever as duas funções horárias no mesmo referencial e com a mesma aceleração, porque encontrar-se é ocupar a mesma posição no mesmo instante, $h_A = h_B$.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.6) e diga o que cada símbolo significa. Com a origem no solo e o eixo para cima, a pedra A parte de 80 m com $v_0 = 0$ e a pedra B parte do solo com 40 m/s; as duas têm a mesma aceleração, $-g$.

2 Organizar

Dados $h_{0A} = 80\,\text{m}$ e $v_{0A} = 0$
$h_{0B} = 0$ e $v_{0B} = 40\,\text{m/s}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: altura em metros, velocidade em m/s e g em m/s^2.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia escreva as duas funções horárias, iguale, isole t e substitua em uma delas.

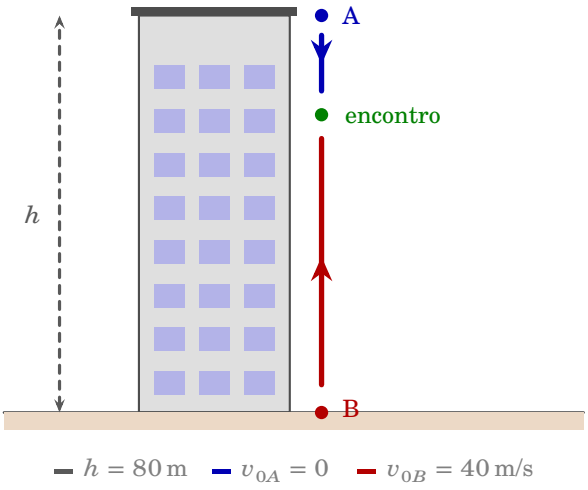


Figura 2.14

3 Resolver

Funções horárias. Escreva as duas, com $^1/_2 g = 5\,\text{m/s}^2$:

$$h_A = 80 - 5\,t^2$$
$$h_B = 40\,t - 5\,t^2$$

Condição de encontro. Iguale as alturas e some $5t^2$ aos dois lados:

$$80 - 5\,t^2 = 40\,t - 5\,t^2$$
$$80 = 40\,t$$

$$\boxed{t = 2\,\text{s}}$$

Altura do encontro. Substitua $t = 2\,\text{s}$ na função de A:

$$h = 80 - 5 \times 2^2$$

$$\boxed{h = 60\,\text{m}}$$

Confira na função de B: $h_B = 40 \times 2 - 5 \times 4 = 60\,\text{m}$.

4 Avaliar

Avalie a coerência: em 2 s, A cai 20 m (de 80 para 60 m) e B sobe 60 m; os dois trechos somam os 80 m iniciais. Fecha. Os termos em t^2 desapareceram porque a gravidade age igualmente sobre as duas pedras: o encontro depende só da velocidade relativa de aproximação,

40 m/s, e $t = 80/40 = 2$ s. Isso vale para qualquer encontro de dois corpos com a mesma aceleração.

Nos problemas de encontro com dois objetos em queda/lançamento vertical, os termos com t^2 sempre se simplificam. Isso transforma o problema em uma simples equação do 1º grau!

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — BR Distribuidora, Operação, 2010

Uma pedra foi arremessada verticalmente para cima e levou 2,4 segundos para retornar ao ponto de partida. A aceleração da gravidade é igual a 10 m/s^2. Com relação ao ponto de partida, qual a altura, em metros, atingida pela pedra?

(A) 7,2
(B) 12,8
(C) 14,4
(D) 19,2
(E) 28,8

WC8N8Y

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Um helicóptero de reportagem encontra-se na mesma posição, a 125 m acima do solo, enquanto é realizada uma determinada matéria sobre o trânsito na cidade. Durante a reportagem, o jornalista, passageiro do helicóptero, acidentalmente, deixa cair seu microfone. A resistência do ar pode ser considerada desprezível na queda, e a aceleração da gravidade local é de 10 m/s^2. No momento do acidente, um veículo trafegava por uma rodovia retilínea, abaixo do helicóptero, com velocidade constante de 72 km/h. A distância percorrida pelo veículo, em metros, no intervalo de tempo correspondente à queda do microfone é

(A) 100
(B) 125
(C) 250
(D) 360
(E) 500

Q94SRR

2.3 Movimento em Duas Dimensões

Os movimentos bidimensionais mais importantes nos concursos da área de petróleo são o **lançamento horizontal** e o **lançamento oblíquo**. Nos dois, a única força que age depois do lançamento é o peso, e a estratégia é uma só: decompor o movimento em dois eixos e tratar cada um como um movimento retilíneo à parte, com as equações da seção anterior. No eixo horizontal (x) não há aceleração, e o movimento é um MRU, com velocidade constante. No eixo vertical (y) a aceleração é g, para baixo, e o movimento é um MRUV.

O que autoriza essa separação é o **princípio da independência dos movimentos**, de Galileu: o movimento ao longo de x não altera o movimento ao longo de y, e vice-versa. O único elo entre os dois eixos é o tempo, que é o mesmo para ambos, e é por ele que um eixo informa o outro: você resolve o eixo y para obter o tempo e leva o tempo ao eixo x.

2.3.1 Equações Gerais do Movimento em Duas Dimensões

Para qualquer movimento 2D em que a única força atuante é a gravidade, as equações completas em cada eixo são:

Eixo x (MRU)		*Eixo y* (MRUV)	
$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$	(2.9)	$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$	(2.11)
$v_x = v_{0x}$	(2.10)	$v_y = v_{0y} + a \cdot t$	(2.12)
		$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a \cdot (y - y_0)$	(2.13)

x_0, y_0: coordenadas iniciais do corpo; dependem do referencial adotado (m)
v_{0x}, v_{0y}: componentes da velocidade inicial (m/s)
v_x, v_y: componentes da velocidade no instante t (m/s)
a: aceleração no eixo vertical: $a = -g$ com o eixo y para cima, $a = +g$ com o eixo y para baixo (m/s^2)

NOTA

As constantes x_0 e y_0 dependem inteiramente do referencial adotado para resolver o problema. As duas escolhas mais comuns em lançamentos são:

- **Origem no ponto de lançamento** (conveniente quando o próprio corpo é a referência natural): $x_0 = 0, y_0 = 0$.
- **Origem no solo** (conveniente quando se pede altura absoluta ou quando o corpo parte de uma plataforma elevada): $x_0 = 0, y_0 = h$, onde h é a altura de lançamento.

> Qualquer escolha é válida, desde que seja mantida durante toda a resolução. Os resultados físicos (tempo de queda, alcance, altura máxima) são os mesmos em qualquer referencial; apenas as equações intermediárias mudam de forma. Na prática, escolha o referencial que torne o maior número de constantes iguais a zero.

2.3.2 Lançamento Horizontal

No **lançamento horizontal**, o corpo é lançado com velocidade inicial v_0 exclusivamente na direção horizontal, a partir de uma altura h.

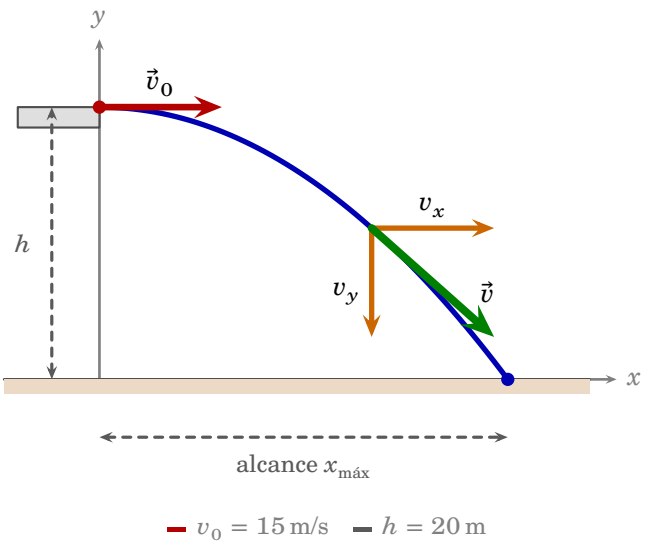


Figura 2.15

Faça $v_{0x} = v_0$ e $v_{0y} = 0$ nas equações gerais. No eixo x sobra um MRU com velocidade v_0; no eixo y sobra uma queda livre, com $a = -g$ se o eixo aponta para cima e $a = +g$ se aponta para baixo:

$$x = x_0 + v_0\,t \qquad\qquad v_x = v_0$$
$$y = y_0 + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad\qquad v_y = a\,t$$

Os resultados que a prova costuma pedir saem daí em três linhas. Com a origem no solo, $y_0 = h$, eixo y para cima e $a = -g$, o impacto acontece em $y = 0$. Faça isso na função da posição do eixo y e isole o tempo, leve o tempo ao MRU do eixo x e componha as duas velocidades

por Pitágoras:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (0 = h - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$x_{\text{máx}} = v_0 \, t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (\text{com } v_x = v_0 \text{ e } v_y = g\,t)$$

O tempo de queda depende só da altura, e o alcance, que é o valor de x no instante do impacto, é esse tempo vezes a velocidade horizontal.

EXEMPLO 2.13 • Lançamento Horizontal: Projétil de Plataforma

Uma bola é lançada horizontalmente com velocidade de 15 m/s a partir de uma plataforma a 20 m de altura. Adotando $g = 10\,\text{m/s}^2$, determine:

a) O tempo de queda;
b) O alcance horizontal;
c) A velocidade ao atingir o solo.

1 Compreender

O assunto é o **lançamento horizontal**: a composição de um MRU na horizontal com uma queda livre na vertical, independentes um do outro e ligados pelo tempo.

Objetivo. Obter o tempo de queda, o alcance e a velocidade com que a bola chega ao solo. O que está em jogo é resolver o eixo y primeiro, porque é ele que dá o tempo, e só então levar o tempo ao eixo x; a velocidade no impacto combina as duas componentes pelo teorema de Pitágoras.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.11) e diga o que cada símbolo significa. Com $v_{0y} = 0$ ela é a queda livre do eixo y; a Equação (2.9) é o MRU do eixo x, e a Equação (2.12) dá a componente vertical da velocidade no impacto.

2 Organizar

Dados $v_0 = 15\,\text{m/s}$, horizontal
$h = 20\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$. Referencial: origem no ponto de lançamento, eixo y para cima, logo $a = -10\,\text{m/s}^2$ e o solo está em $y = -20\,\text{m}$.

Conversões nenhuma: velocidade em m/s, altura em metros e g em m/s^2.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia monte as equações do eixo x (MRU) e do eixo y (MRUV) com os dados; substitua nelas a condição do impacto, $y = -20\,\text{m}$, para obter t, depois $x_{\text{máx}}$ e v_y; por fim, componha v_x e v_y.

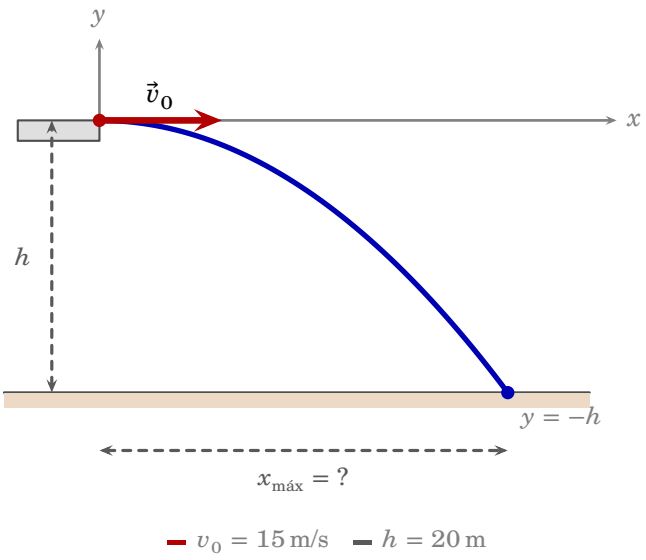


Figura 2.16

3 Resolver

Equações dos dois eixos. Monte-as com os dados, $v_{0x} = 15\,\text{m/s}$, $v_{0y} = 0$ e $a = -10\,\text{m/s}^2$:

$$x = 15\,t \qquad \text{(eixo } x\text{, MRU)}$$
$$y = -5\,t^2 \qquad \text{(eixo } y\text{, MRUV)}$$
$$v_y = -10\,t$$

a) Condição de impacto no eixo y. No impacto, $y = -20\,\text{m}$. Substitua na função da posição do eixo y e isole t:

$$-20 = -5\,t^2$$
$$t^2 = 4$$

$$\boxed{t = 2\,\text{s}}$$

b) Alcance, no eixo x. Substitua $t = 2\,\text{s}$ na equação do eixo x:

$$x_{\text{máx}} = 15 \times 2$$

$$\boxed{x_{\text{máx}} = 30\,\text{m}}$$

c) Componentes da velocidade no impacto. Substitua $t = 2\,\text{s}$ na

função da velocidade do eixo y; no eixo x a velocidade é a de sempre:

$$v_x = 15\,\text{m/s}$$
$$v_y = -10 \times 2 = -20\,\text{m/s}$$

O sinal negativo diz que v_y aponta para baixo.

Módulo, pelo teorema de Pitágoras. Componha as duas componentes:

$$v = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625}$$

$$\boxed{v = 25\,\text{m/s}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o tempo de queda é o mesmo de uma queda livre de 20 m, o que confirma que a velocidade horizontal não altera o movimento vertical. Os valores 15, 20 e 25 são o triângulo 3-4-5 multiplicado por 5, e a hipotenusa sai sem conta. Uma ferramenta que escapa de uma plataforma elevada cai no mesmo tempo, esteja parada ou lançada na horizontal; o que muda é onde ela cai, e é isso que define a área de isolamento abaixo de um trabalho em altura.

Uma bola lançada horizontalmente e outra abandonada do repouso a partir da mesma altura chegam ao solo **simultaneamente**. O tempo de queda não depende da velocidade horizontal, depende apenas da altura.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2011

Um objeto desliza sobre uma mesa e atingirá o chão após ultrapassar a borda dessa mesa, descrevendo um movimento parabólico com relação aos eixos horizontal e vertical arbitrados por um observador parado.

Com relação a esse observador, é correto afirmar sobre o objeto que sua(s)

(A) velocidade horizontal e sua aceleração vertical são constantes.

(B) velocidade horizontal varia, e sua aceleração permanece constante.

(C) aceleração e velocidades variam.

(D) velocidades horizontal e vertical são variáveis.

(E) velocidades vertical e horizontal são constantes.

SMVXMJ

2.3.3 Lançamento Oblíquo

No **lançamento oblíquo**, o corpo é lançado com velocidade inicial v_0 formando um ângulo θ com a horizontal.

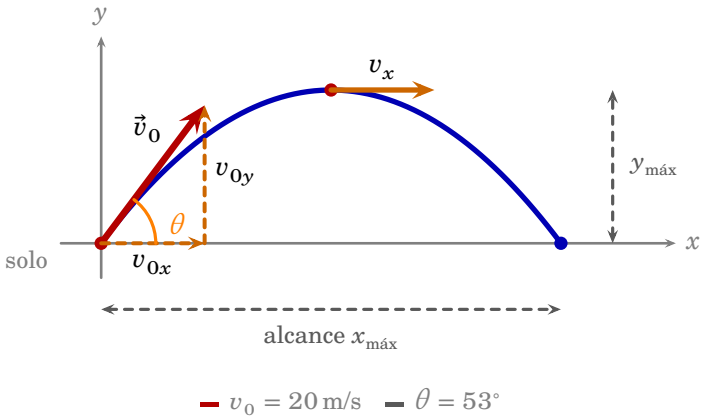


Figura 2.17

Decomponha a velocidade inicial pelo triângulo da figura: a componente horizontal, $v_{0x} = v_0 \cos\theta$, fica constante, e a vertical, $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$, varia sob a ação de g. Ponha a origem no ponto de lançamento ($x_0 = 0$ e $y_0 = 0$), o eixo y para cima ($a = -g$), e leve as duas componentes às equações gerais:

$$x = v_{0x}\,t \qquad\qquad v_x = v_{0x}$$
$$y = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad\qquad v_y = v_{0y} - g\,t$$

Tudo o que a prova pergunta sobre esse movimento sai dessas equações, uma pergunta de cada vez. Em cada uma, a conta começa por dizer o que acontece no ponto da trajetória em questão.

Tempo de subida. No ponto mais alto a velocidade vertical se anula, $v_y = 0$. Substitua na função da velocidade do eixo y e isole t:

$$0 = v_{0y} - g\,t_{\text{subida}}$$
$$t_{\text{subida}} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Altura máxima. É o valor de y nesse mesmo ponto. Substitua $v_y = 0$ em Torricelli no eixo y e isole $y_{\text{máx}}$:

$$0 = v_{0y}^2 - 2g\,y_{\text{máx}}$$
$$y_{\text{máx}} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Tempo de voo. Quando o corpo volta ao nível de partida, $y = 0$. Substitua na função da posição do eixo y e isole t:

$$0 = v_{0y}\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$$
$$0 = t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}g\,t\right)$$
$$t_{\text{voo}} = \frac{2\,v_{0y}}{g} = \frac{2\,v_0\,\operatorname{sen}\theta}{g}$$

A raiz $t = 0$ é o instante do lançamento; a outra é o tempo de voo, o dobro do tempo de subida, porque a parábola é simétrica.

Alcance. É o valor de x no instante em que o corpo chega ao solo. Substitua t_{voo} no MRU do eixo x:

$$x_{\text{máx}} = v_{0x}\,t_{\text{voo}} = v_0\cos\theta\,.\,\frac{2\,v_0\,\operatorname{sen}\theta}{g}$$
$$x_{\text{máx}} = \frac{v_0^2\,\operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

A última linha usa a identidade $2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}(2\theta)$. Os quatro resultados estão no resumo interativo do capítulo, mas o que vale é saber de onde cada um vem: a banca gosta de mudar o nível de chegada, e aí só as equações gerais servem.

EXEMPLO 2.14 • Lançamento Oblíquo: Projétil a 53°

Um projétil é lançado com velocidade de 50 m/s formando um ângulo de 53° com a horizontal. Adotando $g = 10\ \text{m/s}^2$, $\operatorname{sen}53° = 0{,}8$ e $\cos 53° = 0{,}6$, determine:

a) As componentes da velocidade inicial;
b) A altura máxima atingida;
c) O alcance horizontal.

1 Compreender

O assunto é o **lançamento oblíquo**: um MRU no eixo x e um MRUV no eixo y, independentes e ligados pelo tempo.

Objetivo. Obter as componentes da velocidade inicial, a altura máxima e o alcance. O que está em jogo é traduzir cada pergunta numa condição sobre um dos eixos: a altura máxima é o valor de y quando $v_y = 0$, e o alcance é o valor de x no instante em que y volta a zero.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.11) e diga o que cada símbolo significa. Ela, com as Equações (2.12) e (2.13), resolve o eixo y; a Equação (2.9) é o MRU do eixo x. O par $\operatorname{sen}53° = 0{,}8$ e $\cos 53° = 0{,}6$ é clássico da banca.

NOTA

Neste livro a altura máxima se escreve $y_{\text{máx}}$ e o alcance, $x_{\text{máx}}$, embora muitos textos usem h e A. O motivo é o método: o lançamento se resolve com as equações do MRU no eixo x e as do MRUV no eixo y, e altura máxima e alcance são só o maior valor que y e x assumem nessas equações. Símbolo novo sugere equação nova para decorar, e aqui não há nenhuma.

NOTA

O alcance é máximo quando $\theta = 45°$, pois $\operatorname{sen}(2\times 45°) = \operatorname{sen}90° = 1$. Ângulos complementares (ex.: 30° e 60°) produzem o **mesmo alcance**, pois $\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}(180° - 2\theta)$.

2 **Organizar**

Dados $v_0 = 50\,\text{m/s}$
$\theta = 53°$, com $\operatorname{sen} 53° = 0{,}8$ e $\cos 53° = 0{,}6$
$g = 10\,\text{m/s}^2$. Referencial: origem no ponto de lançamento, eixo y para cima, logo $a = -10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: velocidade em m/s e g em m/s^2.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia decomponha v_0; monte as equações do eixo x (MRU) e do eixo y (MRUV) com os dados; substitua nelas a condição de cada ponto pedido: $v_y = 0$ no ponto mais alto, $y = 0$ na queda.

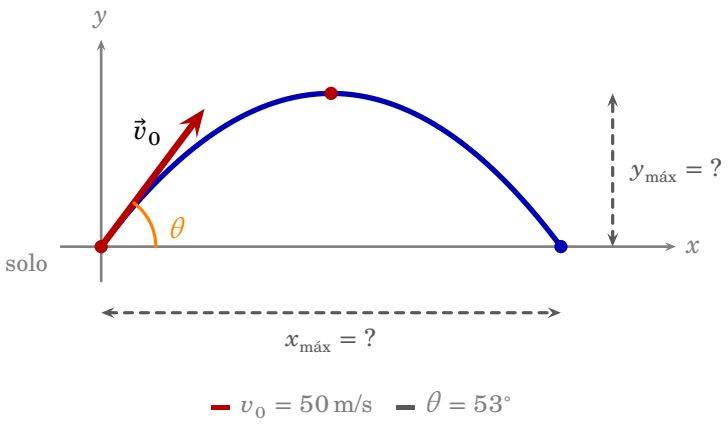


Figura 2.18

3 **Resolver**

a) Componentes da velocidade inicial. Decomponha $\vec{v}_0$:

$$v_{0x} = 50 \times 0{,}6$$
$$v_{0y} = 50 \times 0{,}8$$

$\boxed{v_{0x} = 30\,\text{m/s}}$ $\boxed{v_{0y} = 40\,\text{m/s}}$

Equações dos dois eixos. Com as componentes, monte-as:

$$x = 30\,t \qquad \text{(eixo } x\text{, MRU)}$$
$$y = 40\,t - 5\,t^2 \qquad \text{(eixo } y\text{, MRUV)}$$
$$v_y = 40 - 10\,t$$
$$v_y^2 = 40^2 - 20\,y$$

b) Ponto mais alto em Torricelli. Ali $v_y = 0$. Substitua e isole

$y_{\text{máx}}$:

$$0 = 1600 - 20\,y_{\text{máx}}$$

$$\boxed{y_{\text{máx}} = 80\,\text{m}}$$

c) Tempo de voo, pela condição $y = 0$. Substitua na função da posição do eixo y e isole t:

$$0 = 40\,t - 5\,t^2$$
$$0 = t\,(40 - 5\,t)$$
$$t_{\text{voo}} = 8\,\text{s}$$

A raiz $t = 0$ é o instante do lançamento.

Alcance, no eixo x. Substitua $t = 8\,\text{s}$ na equação do eixo x:

$$x_{\text{máx}} = 30 \times 8$$

$$\boxed{x_{\text{máx}} = 240\,\text{m}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 30 e 40 m/s recompõem os 50 m/s de partida, o triângulo 3-4-5 multiplicado por 10. O tempo de voo confere pela simetria: $v_y = 0$ na função da velocidade dá o tempo de subida, $40/10 = 4\,\text{s}$, e 8 s é o dobro. A fórmula do alcance, deduzida acima, confirma: como $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2 \times 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}96$, vem $x_{\text{máx}} = 2500 \times 0{,}96/10 = 240\,\text{m}$. Fecha. Em prova, quando os valores de seno e cosseno vêm no enunciado, use-os como estão: a banca os escolheu para a conta fechar em números inteiros.

EXEMPLO 2.15 • Lançamento Oblíquo: Alcance a 30°

Um projétil é lançado com velocidade de 100 m/s a 30° com a horizontal. A que distância horizontal do ponto de lançamento o projétil atinge o solo? ($g = 10\,\text{m/s}^2$, $\operatorname{sen}30° = 0{,}5$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

1 Compreender

O assunto é o **alcance** de um lançamento oblíquo que volta ao nível de lançamento: um MRU no eixo x e um MRUV no eixo y.

Objetivo. Obter a distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto de queda. O que está em jogo é entender o alcance como o valor de x no instante em que y volta a zero, e não como fórmula à

parte; a fórmula deduzida no texto serve para conferir.

Antes de seguir, escreva a Equação (2.11) e diga o que cada símbolo significa. Com $y = 0$ ela dá o tempo de voo, que a Equação (2.9) converte em alcance.

2 Organizar

Dados $v_0 = 100\,\text{m/s}$
$\theta = 30°$, com $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$ e $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$. Referencial: origem no ponto de lançamento, eixo y para cima, logo $a = -10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: velocidade em m/s e g em m/s^2.

Esquema a figura logo abaixo.

Estratégia decomponha v_0; monte as equações do eixo x (MRU) e do eixo y (MRUV) com os dados; substitua $y = 0$ para obter o tempo de voo, e o tempo de voo na equação do eixo x.

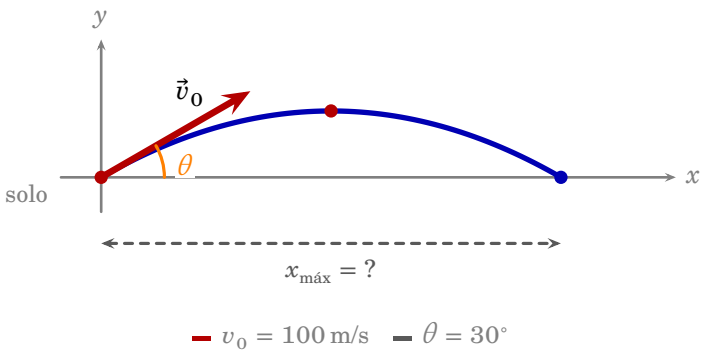


Figura 2.19

3 Resolver

Componentes da velocidade inicial. Decomponha $\vec{v}_0$:

$$v_{0x} = 100 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\,\text{m/s}$$
$$v_{0y} = 100 \times 0{,}5 = 50\,\text{m/s}$$

Equações dos dois eixos. Monte-as com as componentes:

$$x = 50\sqrt{3}\,t \qquad \text{(eixo } x\text{, MRU)}$$
$$y = 50\,t - 5\,t^2 \qquad \text{(eixo } y\text{, MRUV)}$$

Tempo de voo, pela condição $y = 0$. Substitua na função da

posição do eixo y e isole t:

$$0 = 50\,t - 5\,t^2$$
$$0 = t\,(50 - 5\,t)$$
$$t_{\text{voo}} = 10\,\text{s}$$

Alcance, no eixo x. Substitua $t = 10\,\text{s}$ na equação do eixo x:

$$x_{\text{máx}} = 50\sqrt{3} \times 10 = 500\sqrt{3}\,\text{m}$$

$$\boxed{x_{\text{máx}} \approx 866\,\text{m}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a 45° o alcance seria o máximo, $100^2/10 = 1\,000\,\text{m}$; a 30° tem de ser menor, e 866 m é. Outra forma de fazer: a fórmula do alcance dá o mesmo em uma linha, $x_{\text{máx}} = 100^2 \times \operatorname{sen} 60°/10 = 500\sqrt{3}\,\text{m}$, e em prova é o caminho mais curto quando o lançamento volta ao nível de partida. Sem calculadora, use $\sqrt{3} \approx 1{,}73$: $500 \times 1{,}73 = 865\,\text{m}$, que basta para escolher a alternativa. Lembre que 30° e 60° são complementares e dão o mesmo alcance, comparação que a banca gosta de pedir.

DICA

Em problemas de movimento bidimensional, sempre resolva o eixo y primeiro para encontrar o tempo, depois aplique no eixo x. A independência entre os eixos é a chave: o que acontece horizontalmente não afeta o que acontece verticalmente.

CAPÍTULO

3

Dinâmica

Toda a dificuldade da filosofia parece consistir nisto: a partir dos fenômenos dos movimentos, investigar as forças da natureza; e depois, a partir dessas forças, demonstrar os demais fenômenos.

ISAAC NEWTON

Dos movimentos, as forças, e das forças, os outros movimentos. É esse o caminho de ida e volta que Newton anuncia no prefácio ao leitor dos *Princípios Matemáticos da Filosofia Natural* (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*), datado de Cambridge, 8 de maio de 1686, e impresso em Londres no ano seguinte, e é o que este capítulo percorre. A Cinemática lhe deu os movimentos. A Dinâmica faz o resto: dos movimentos observados, descobrir as forças que os produzem, e das forças conhecidas, prever movimentos que ainda não aconteceram. Cada diagrama de corpo livre que você vai desenhar é esse vaivém em miniatura.

A **Dinâmica** é o ramo da Mecânica que estuda as **causas** do movimento. Enquanto a Cinemática (cap. 2) descreve *como* os corpos se movem, a Dinâmica explica *por que* eles se movem dessa forma, por meio do estudo das **forças** e das interações entre corpos. As **Leis de Newton**, formuladas no século XVII, constituem a base da Mecânica Clássica e permitem prever o comportamento de sistemas desde pequenas partículas até grandes estruturas industriais.

Na indústria de petróleo e gás, a aplicação das Leis de Newton aparece a todo momento: no içamento de módulos por guindastes

em plataformas *offshore*, na tração em *risers*, no atrito em dutos e sistemas de armazenamento, no equilíbrio dinâmico de plataformas submetidas a ondas, e no movimento circular em centrífugas de separação. Um erro no dimensionamento de forças pode significar desde perda de produção até acidentes com risco à vida. Dominar este capítulo é essencial para concursos da banca Cesgranrio, que historicamente cobra Dinâmica com forte ênfase em equilíbrio, plano inclinado, atrito e sistemas com polias.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Compreender o conceito de força como interação vetorial entre corpos;
- Classificar forças quanto à sua origem macroscópica e fundamental;
- Aplicar as três Leis de Newton a situações estáticas e dinâmicas;
- Diferenciar rigorosamente massa de peso;
- Construir e interpretar diagramas de corpo livre (DCL);
- Resolver problemas de equilíbrio de partículas (1ª Lei);
- Resolver problemas de dinâmica de partículas aceleradas (2ª Lei);
- Trabalhar com forças de atrito estático e cinético;
- Analisar movimentos circulares por meio da força centrípeta;
- Reconhecer e aplicar a Lei de Hooke para forças elásticas.

3.1 Força e Interações

Uma **força** é uma grandeza vetorial que representa a **interação** entre dois corpos. Toda força resulta de uma interação mútua: um corpo não pode exercer força sobre si mesmo. Quando afirmamos que "uma força F atua sobre um corpo", está sempre implícito que *outro* corpo é o agente dessa força.

NOTA

Como toda grandeza vetorial, a força é caracterizada por módulo, direção e sentido. Revise o cap. 1 (1.4).

3.1.1 Características de uma Força

Como grandeza vetorial, uma força possui quatro atributos:

- **Módulo** (intensidade), medido em **newtons** [N];
- **Direção** da linha de ação;
- **Sentido** ao longo dessa direção;
- **Ponto de aplicação**, onde a força atua sobre o corpo.

A unidade de força no Sistema Internacional é o **newton** (N), definido como a força necessária para imprimir a um corpo de 1 kg uma aceleração de $1\,\mathrm{m/s^2}$:

$$1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{m/s^2} \tag{3.1}$$

Como as forças são vetores, somam-se como vetores. Quando todas têm a mesma direção, a soma vira uma conta com sinais; quando não, decompõe-se cada uma em componentes. Os dois exemplos a seguir mostram os dois casos.

EXEMPLO 3.1 • Força resultante de múltiplas forças

Três forças horizontais atuam sobre um bloco: $F_1 = 20\,\mathrm{N}$ para a direita, $F_2 = 15\,\mathrm{N}$ para a esquerda e $F_3 = 10\,\mathrm{N}$ para a direita. Determine a força resultante.

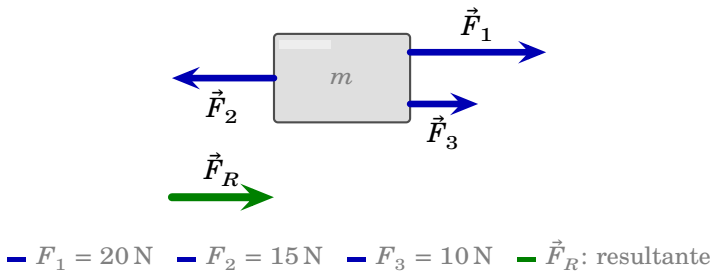


Figura 3.1

1 Compreender

O assunto é a **força resultante**, a soma vetorial de todas as forças que atuam no corpo.

Objetivo. Obter o módulo e o sentido da força resultante sobre o bloco. O que está em jogo é ver que as três forças têm a mesma direção, e por isso a soma vetorial se reduz a uma soma algébrica: escolha um sentido como positivo, dê sinal a cada força e some.

Antes de seguir, releia a Definição 1.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. O sinal do resultado diz o sentido da resultante; o módulo é o valor absoluto.

2 Organizar

Dados $F_1 = 20\,\mathrm{N}$ para a direita
$F_2 = 15\,\mathrm{N}$ para a esquerda
$F_3 = 10\,\mathrm{N}$ para a direita.

Conversões nenhuma: as três forças já estão em newtons.

Estratégia adote direita como positivo e esquerda como negativo, e some as três com os sinais.

3 Resolver

Soma com sinais. Some as forças com os sinais da convenção:

$$\begin{aligned} F_R &= F_1 - F_2 + F_3 \\ &= 20 - 15 + 10 \end{aligned}$$

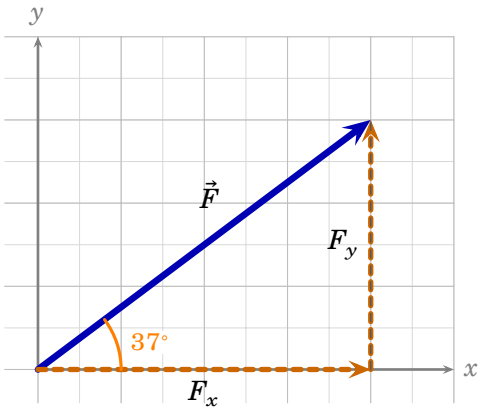
$F_R = 15\,\text{N}$, para a direita

4 Avaliar

Avalie a coerência: as forças para a direita somam 30 N e a única força para a esquerda vale 15 N, então sobra 15 N para a direita, com sinal positivo na convenção adotada. Esse raciocínio é o ponto de partida para qualquer sistema com forças colineares, de uma esteira transportadora a um duto sendo puxado por dois guinchos em sentidos opostos.

EXEMPLO 3.2 • Decomposição de uma força em componentes

Uma força de módulo $F = 50\,\text{N}$ forma um ângulo de 37° com a horizontal. Determine as componentes horizontal e vertical dessa força. Use $\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$ e $\cos 37° = 0{,}8$.



Escala: 1 quadrado = 10 N

$F = 50\,\text{N}$ — F_x, F_y: componentes de $\vec{F}$ $\theta = 37°$

Figura 3.2

1 Compreender

O assunto é a **decomposição de um vetor**: substituir a força por duas componentes perpendiculares que, somadas, reproduzem a força original.

Objetivo. Obter as componentes horizontal e vertical da força. O que

está em jogo é saber de qual eixo o ângulo é medido: a componente ao longo do eixo que faz o ângulo θ com a força leva o cosseno, a outra leva o seno.

Antes de seguir, escreva a Equação (1.2) e diga o que cada símbolo significa. A Equação (1.3) é a companheira dela, com o seno.

2 Organizar

Dados $F = 50\,\text{N}$
$\theta = 37°$ com a horizontal
$\cos 37° = 0{,}8$
$\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$.

Conversões nenhuma: força em newtons e ângulo em graus, com seno e cosseno dados.

Estratégia use $F_x = F\cos\theta$ e $F_y = F\operatorname{sen}\theta$.

3 Resolver

Componente horizontal. Ela fica com o cosseno, porque o ângulo é medido a partir da horizontal:

$$F_x = F\cos\theta = 50 \times 0{,}8$$

$$\boxed{F_x = 40\,\text{N}}$$

Componente vertical. Com o seno:

$$F_y = F\operatorname{sen}\theta = 50 \times 0{,}6$$

$$\boxed{F_y = 30\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo teorema de Pitágoras: $\sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2\,500} = 50\,\text{N}$, que é o módulo original. É o triângulo 3-4-5 do cap. 1, e ele volta em quase toda questão com 37° ou 53°. Em um problema prático, como puxar uma caixa por uma corda inclinada, a componente vertical alivia o apoio no piso e reduz o atrito. **Cuidado com a pegadinha:** se o ângulo fosse dado com a *vertical*, seno e cosseno trocariam de lugar. Antes de decompor, confira de qual eixo o ângulo está sendo medido.

3.1.2 Classificação Macroscópica

Do ponto de vista prático, as forças encontradas em problemas de Mecânica dividem-se em dois grupos:

- **Forças de contato:** exigem o contato físico direto entre os corpos. Exemplos: força normal, atrito, tração em cabos, força elástica em molas, empuxo de fluidos.
- **Forças de campo:** atuam à distância, por meio de um campo gerado por um dos corpos. Exemplos: força gravitacional (peso), força elétrica e força magnética.

Natureza fundamental

Macroscopicamente, distinguimos "contato" de "campo". Em escala atômica, porém, toda força cotidiana tem origem em apenas duas das quatro interações fundamentais do Universo: a **gravitacional** (peso) e a **eletromagnética** (todas as demais). O que chamamos de "contato" entre duas superfícies é, microscopicamente, a repulsão eletromagnética entre as nuvens eletrônicas dos átomos.

NOTA

As interações nuclear forte e nuclear fraca existem, mas só se manifestam em escala subatômica: não caem em provas de Mecânica Clássica.

NOTA

Nem toda força de contato é de repulsão: a tração em um cabo, por exemplo, é uma força atrativa que surge quando as ligações intermoleculares do fio "puxam" o corpo preso a ele. Mesmo assim, a origem última continua sendo eletromagnética.

3.1.3 Força de Tração

A **tração** (ou tensão) é a força com que um fio, cabo ou corda transmite força entre dois corpos a ele conectados.

DEFINIÇÃO 3.1 • Tração em fio ideal

Em um **fio ideal**, inextensível e de massa desprezível, que passa por uma **polia ideal**, sem massa e sem atrito, a tração tem o mesmo módulo em todos os pontos do fio:

$$T_{\text{em A}} = T_{\text{em B}} = T$$

A tração sempre atua *puxando* o corpo na direção do fio, nunca empurrando.

DICA

Se o fio está frouxo ($T = 0$), ele não transmite força. Em provas, fique atento a enunciados que indicam "o fio se rompe" ou "o fio afrouxa".

3.1.4 Força Elástica: Lei de Hooke

Molas, amortecedores hidráulicos, válvulas de segurança e *cabeças de poço* usam elementos elásticos que, quando deformados, reagem com uma força proporcional à deformação.

DEFINIÇÃO 3.2 • Lei de Hooke

Enquanto não ultrapassa o **limite elástico** do material, uma mola deformada a partir de seu comprimento natural exerce sobre o corpo a ela preso uma **força elástica** contrária à deformação e proporcional a ela. A constante de proporcionalidade é a **constante elástica** da mola, que mede sua rigidez.

$$F_{el} = k \cdot x \tag{3.2}$$

F_{el}: módulo da força elástica (N)
k: constante elástica da mola (N/m)
x: deformação (compressão ou distensão) em relação ao comprimento natural (m)

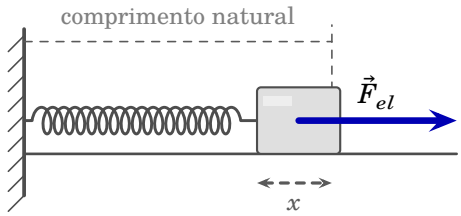
O sinal da força elástica é sempre oposto ao deslocamento: se a mola é esticada, a força puxa o corpo de volta; se comprimida, empurra. Essa é a característica que dá nome à força: ela *restaura* o equilíbrio do sistema.

NOTA

Na indústria, o coeficiente k aparece no dimensionamento de molas de válvulas de alívio (PSV) em unidades de processo.

EXEMPLO 3.3 • Deformação de uma mola pela Lei de Hooke

Uma mola de constante elástica $k = 2\,500\,\text{N/m}$ é comprimida em $x = 1{,}2\,\text{cm}$ a partir do seu comprimento natural. Qual o módulo da força elástica que a mola exerce sobre o corpo que a comprime?



$\vec{F}_{el}$: força elástica $x = 1{,}2$ cm

deformação exagerada para leitura; a seta não tem escala

Figura 3.3

1 Compreender

O assunto é a **Lei de Hooke**: a força que a mola exerce é proporcional ao quanto ela foi deformada.

Objetivo. Obter o módulo da força que a mola exerce sobre o corpo que a comprime. O que está em jogo é a unidade: k vem em N/m e a deformação em centímetros, e a conversão tem de vir antes da conta.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.2) e diga o que cada símbolo significa. A constante k diz quantos newtons a mola responde por

metro de deformação.

2 **Organizar**

Dados $k = 2\,500\,\text{N/m}$
$x = 1{,}2\,\text{cm}$.

Conversões $x = 1{,}2\,\text{cm} = 0{,}012\,\text{m}$.

Estratégia aplique $F_{el} = kx$.

3 **Resolver**

Lei de Hooke. Substitua a deformação em metros:

$$\begin{aligned} F_{el} &= k \cdot x \\ &= 2\,500 \times 0{,}012 \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{el} = 30\,\text{N}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 1,2 cm é pouco mais de um centésimo de metro, e um centésimo de 2 500 é 25; o valor 30 N tem a ordem de grandeza certa. A mesma expressão $F_{el} = kx$ dimensiona as molas de válvulas de alívio em unidades industriais: a pressão de abertura é ajustada pela compressão inicial da mola. **Cuidado com a pegadinha:** se você usar 1,2 cm sem converter, o resultado sai cem vezes maior (3 000 N). Boa parte dos erros em questões de Hooke na Cesgranrio vem exatamente daí.

> **NOTA**
>
> Se a força aplicada ultrapassar o **limite elástico** do material, a mola sofre deformação plástica e a Lei de Hooke deixa de valer. Molas reais são projetadas para operar sempre no regime elástico.

3.2 Primeira Lei de Newton (Inércia)

A **Primeira Lei de Newton**, também conhecida como **Lei da Inércia**, foi originalmente formulada por Galileu Galilei e, mais tarde, incorporada por Newton ao seu tratado *Principia Mathematica* (1687).

DEFINIÇÃO 3.3 • Primeira Lei de Newton: Lei da Inércia

Todo corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a mudar esse estado por forças aplicadas sobre ele. Se a força resultante sobre um corpo é nula, sua velocidade permanece constante em módulo, direção e sentido. O repouso, $\vec{v} = \vec{0}$, é um caso particular de "velocidade constante".

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \vec{v} = \text{constante} \tag{3.3}$$

$\sum \vec{F}$: força resultante sobre o corpo (N)
$\vec{v}$: velocidade do corpo (m/s)

3.2.1 O Conceito de Inércia

DEFINIÇÃO 3.4 • Inércia

Inércia é a propriedade que os corpos têm de resistir a mudanças em seu estado de movimento. A medida quantitativa da inércia de um corpo é a sua **massa**: quanto maior a massa, maior a inércia.

DICA

Inércia não é uma força, é uma *propriedade* dos corpos. Confundir "inércia" com "força da inércia" é um erro comum em provas.

3.2.2 Referenciais Inerciais

A Primeira Lei só vale em **referenciais inerciais**: aqueles que estão em repouso ou em MRU em relação a um referencial fixo em relação às estrelas distantes. Rigorosamente, a Terra *não* é um referencial inercial: ela gira em torno de seu eixo e translada em torno do Sol. Contudo, para a grande maioria dos problemas da Mecânica Clássica, inclusive aqueles cobrados em concursos, a aceleração devido à rotação terrestre é desprezível e podemos tratar a superfície da Terra como aproximadamente inercial.

NOTA

Efeitos não inerciais da rotação da Terra (força de Coriolis) são relevantes em meteorologia, mísseis de longo alcance e oceanografia, mas não em problemas típicos de concurso.

3.2.3 Equilíbrio de Partículas

Da Primeira Lei segue que um corpo está em **equilíbrio** quando a força resultante sobre ele é nula:

- **Equilíbrio estático:** o corpo está em repouso ($\vec{v} = \vec{0}$);
- **Equilíbrio dinâmico:** o corpo está em MRU ($\vec{v} = \text{constante} \neq \vec{0}$).

Em ambos os casos, $\sum \vec{F} = \vec{0}$, ou, em componentes, $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$.

EXEMPLO 3.4 • Livro em repouso sobre uma mesa

Um livro de $m = 2\,\text{kg}$ está em repouso sobre uma mesa horizontal. Identifique as forças que atuam sobre o livro e calcule seus módulos. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

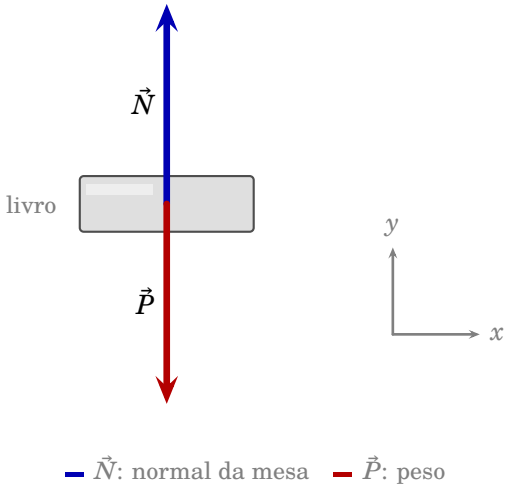


Figura 3.4

1 Compreender

O assunto é o **equilíbrio estático**: o livro está em repouso, logo a força resultante sobre ele é nula pela Primeira Lei.

Objetivo. Identificar as forças que agem no livro e calcular o módulo de cada uma. O que está em jogo é contar as interações, e não as forças que se imagina: a Terra puxa o livro para baixo (peso) e a mesa o empurra para cima (normal), e nada mais.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.3) e diga o que cada símbolo significa. Com duas forças verticais e resultante nula, uma tem o módulo da outra.

2 Organizar

Dados $m = 2\,\text{kg}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
livro em repouso.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2 dão o peso em newtons.

Estratégia calcule o peso por $P = mg$ e imponha $\sum F_y = 0$ no eixo vertical, positivo para cima.

3 Resolver

Peso. Calcule-o:

$$P = m \cdot g = 2 \times 10$$

$$\boxed{P = 20\,\text{N},\ \text{para baixo}}$$

Equilíbrio na vertical. Com o eixo positivo para cima:

$$N - P = 0$$
$$N = P$$

$$\boxed{N = 20\,\text{N},\ \text{para cima}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $N = P$ é o esperado para um corpo em repouso sobre superfície horizontal, sem outras forças verticais. Se alguém empurrasse o livro para baixo com uma força F adicional, a normal se ajustaria para $N = P + F$: a normal não tem valor fixo, ela responde ao que for preciso para manter o contato. **Cuidado com a pegadinha:** peso e normal têm o mesmo módulo e sentidos opostos, mas **não são um par ação-reação**, porque atuam sobre o mesmo corpo. Voltaremos a isso na 3ª Lei.

> **EXEMPLO 3.5** • Carro em movimento retilíneo uniforme
>
> Um carro de $m = 1\,000\,\text{kg}$ desloca-se em linha reta a velocidade constante de $v = 20\,\text{m/s}$ (72 km/h) sobre uma via plana. O que se pode afirmar sobre as forças que atuam sobre ele? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto é o **equilíbrio dinâmico**: velocidade constante em linha reta é MRU, e pela Primeira Lei a força resultante é nula.

Objetivo. Dizer que forças atuam no carro e que relação elas guardam entre si. O que está em jogo é entender que resultante nula não significa ausência de forças, e sim forças que se equilibram, eixo por eixo.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.3) e diga o que cada símbolo significa. Ela vale em cada eixo separadamente: $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$.

2 **Organizar**

Dados $m = 1\,000\,\text{kg}$
$v = 20\,\text{m/s}$, constante
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: o valor da velocidade não entra na conta; só importa que ela é constante.

Esquema na vertical, peso $\vec{P}$ (para baixo) e normal $\vec{N}$ (para cima)
na horizontal, força do motor $\vec{F}_m$ (para a frente) e resistências $\vec{R}$ (atrito dos pneus e do ar, contra o movimento).

Estratégia imponha $\sum F_y = 0$ e $\sum F_x = 0$.

3 **Resolver**

Equilíbrio na vertical. A normal equilibra o peso:

$$N = P = mg = 1\,000 \times 10$$

$$\boxed{N = P = 10\,000\,\text{N}}$$

Equilíbrio na horizontal. A força do motor equilibra as resistências:

$$F_m - R = 0$$

$$\boxed{F_m = R}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o motor não precisa empurrar o carro "com aceleração" para mantê-lo em velocidade constante; basta compensar exatamente as forças resistivas. O mesmo raciocínio vale para qualquer equipamento em regime permanente: esteiras transportadoras, comboios de vagões, embarcações em rota. Se o motor fornecesse mais que R, o carro aceleraria; se fornecesse menos, frearia.

NOTA

Em baixas velocidades ($< 1\,\text{m/s}$) a resistência do ar é desprezível. Em alta velocidade ($> 20\,\text{m/s}$) ela domina, crescendo com v^2.

EXEMPLO 3.6 • Freada brusca: manifestação da inércia

Um passageiro viaja em um ônibus a $v_0 = 60\,\text{km/h}$ sem usar o cinto de segurança. O motorista freia bruscamente. Sem usar cálculos, explique pela Primeira Lei o que acontece com o passageiro.

1 Compreender

O assunto é a **inércia**: um corpo mantém sua velocidade enquanto nenhuma força resultante o obriga a mudá-la.

Objetivo. Explicar, pela Primeira Lei, o que acontece com o passageiro durante a freada. O que está em jogo é separar os dois corpos: a ação dos freios atua sobre o ônibus, não sobre o passageiro, e sem cinto nada aplica a ele uma força horizontal para trás.

Antes de seguir, releia a Definição 3.4 e diga com suas palavras o que ela afirma. A pergunta não pede conta: pede que você aplique a lei a cada corpo e compare o que acontece com a velocidade de cada um.

2 Organizar

Dados antes da freada, ônibus e passageiro têm a mesma velocidade, 60 km/h, em MRU conjunto.

Conversões nenhuma: a questão é qualitativa, e o valor da velocidade não entra em conta.

Esquema durante a freada, o ônibus recebe a força de atrito dos freios e desacelera
sobre o passageiro, sem cinto, não há força horizontal.

Estratégia aplique a Primeira Lei a cada corpo separadamente.

3 Resolver

Primeira Lei aplicada ao passageiro. Sem força horizontal, ele tende a manter sua velocidade de 60 km/h, isto é, continua em MRU enquanto o ônibus diminui a velocidade. Como o ônibus fica mais lento e o passageiro não, a distância entre ele e o banco da frente diminui.

> O passageiro mantém a velocidade por inércia e avança em relação ao ônibus, podendo colidir com o banco da frente, o painel ou o para-brisa.

4 Avaliar

Avalie a coerência: a expressão popular “o passageiro foi *arremessado* para a frente” é fisicamente imprecisa, porque nada o empurra para a frente. Ele apenas *continua* indo para a frente, enquanto o veículo diminui a velocidade. Esse raciocínio fundamenta a exigência legal do cinto de segurança e a amarração obrigatória de cargas em caminhões e no convés de embarcações de apoio.

NOTA

A mesma análise vale para uma carga solta em uma caçamba: sem amarração, ela segue por inércia enquanto o caminhão freia, colidindo com a cabine. É o princípio das normas de transporte rodoviário de cargas.

3.3 Segunda Lei de Newton

A **Segunda Lei de Newton** é o princípio central da Dinâmica Clássica. Ela estabelece a relação quantitativa entre a força resultante sobre um corpo, a massa desse corpo e a aceleração resultante.

DEFINIÇÃO 3.5 • Segunda Lei de Newton: Princípio Fundamental da Dinâmica

A aceleração de um corpo é diretamente proporcional à força resultante aplicada sobre ele e inversamente proporcional à sua massa. A aceleração tem sempre a mesma direção e o mesmo sentido da **força resultante**, que é a soma vetorial de todas as forças que atuam no corpo.

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a} \tag{3.4}$$

$\vec{F}_R = \sum \vec{F}$: força resultante sobre o corpo (N)
m: massa do corpo (kg)
$\vec{a}$: aceleração do corpo (m/s^2)

3.3.1 Interpretação

A 2ª Lei diz três coisas ao mesmo tempo:

- **Dobrar a força** (com massa fixa) → dobra a aceleração;
- **Dobrar a massa** (com força fixa) → reduz a aceleração à metade;
- Se $\vec{F}_R = \vec{0}$, então $\vec{a} = \vec{0}$, e recuperamos a 1ª Lei como caso particular.

3.3.2 Caráter Vetorial

Como $\vec{F}_R = m\vec{a}$ é uma equação vetorial, ela equivale a duas (ou três) equações escalares, uma por eixo:

$$\sum F_x = m \cdot a_x \tag{3.5}$$

$$\sum F_y = m \cdot a_y \tag{3.6}$$

DICA

Escolha os eixos de modo que a aceleração fique sobre um deles (normalmente o eixo x). Assim $a_y = 0$ e as contas simplificam.

EXEMPLO 3.7 • Aceleração de um bloco em superfície lisa

Uma força horizontal de 60 N é aplicada a um bloco de massa 5 kg que repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. Qual a aceleração do bloco?

1 Compreender

O assunto é a **Segunda Lei**, na sua aplicação mais direta.

Objetivo. Obter a aceleração do bloco. O que está em jogo é reconhecer que, sem atrito, a força aplicada é a única força horizontal e portanto é a própria resultante nessa direção; na vertical, peso e normal se equilibram e não entram na conta.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.4) e diga o que cada símbolo significa. Com a resultante e a massa, a aceleração é uma divisão.

2 Organizar

Dados $F = 60\,\text{N}$
$m = 5\,\text{kg}$
atrito nulo.

Conversões nenhuma: força em newtons e massa em kg dão a aceleração em m/s^2.

Estratégia aplique $F_R = ma$ com $F_R = F$ e isole a.

3 Resolver

Segunda Lei no eixo horizontal. Escreva-a e divida os dois lados por m:

$$F = m \cdot a$$
$$a = \frac{F}{m} = \frac{60}{5}$$

$$\boxed{a = 12\,\text{m/s}^2}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela unidade: $\text{N/kg} = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2)/\text{kg} = \text{m/s}^2$, que é unidade de aceleração. Quanto à ordem de grandeza, em 1 s o bloco passaria de 0 a 12 m/s (43 km/h), o que só é possível porque não há atrito. Em um piso real, parte da força seria gasta vencendo o atrito, e a aceleração seria menor (seção 3.10).

EXEMPLO 3.8 • Força necessária para acelerar um carro

Um carro de $m = 1\,200\,\text{kg}$ parte do repouso e atinge $20\,\text{m/s}$ em $5\,\text{s}$, em movimento retilíneo sobre via plana. Desprezando resistências, qual a força resultante horizontal necessária?

1 Compreender

O assunto é a **Segunda Lei** combinada com a **cinemática**: a aceleração não é dada, mas pode ser obtida da variação de velocidade no intervalo de tempo.

Objetivo. Obter a força resultante horizontal que leva o carro do repouso a $20\,\text{m/s}$ em $5\,\text{s}$. O que está em jogo é perceber que o tempo entra só para achar a aceleração; a força depende de m e de a.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.4) e diga o que cada símbolo significa. A aceleração vem da Equação (2.4), do cap. 2.

2 Organizar

Dados $m = 1\,200\,\text{kg}$
$v_0 = 0$
$v = 20\,\text{m/s}$
$\Delta t = 5\,\text{s}$.

Conversões nenhuma: massa, velocidade e tempo já estão no SI.

Estratégia calcule $a = \Delta v/\Delta t$ e depois $F_R = m \cdot a$.

3 Resolver

Aceleração, pela cinemática. Divida a variação de velocidade pelo tempo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 - 0}{5} = 4\,\text{m/s}^2$$

Segunda Lei. Multiplique a massa pela aceleração:

$$F_R = m \cdot a = 1\,200 \times 4$$

$$\boxed{F_R = 4\,800\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $4\,800\,\text{N}$ é o peso de uma massa de $480\,\text{kg}$, uma força substancial, mas compatível com um motor automotivo real. Perceba que o tempo entrou só para achar a aceleração; a força depende de m e de a, não de quanto tempo o carro levou. No cap. 4, essa

mesma força multiplicada pela distância percorrida dá o trabalho do motor, ligado à potência necessária (4.9).

EXEMPLO 3.9 • Força resultante em duas dimensões

Sobre um bloco de massa $m = 4\,\text{kg}$, apoiado em uma superfície horizontal sem atrito, atuam duas forças simultaneamente: $F_1 = 16\,\text{N}$ na direção do eixo x (para leste) e $F_2 = 12\,\text{N}$ na direção do eixo y (para norte). Determine o módulo e a direção da aceleração.

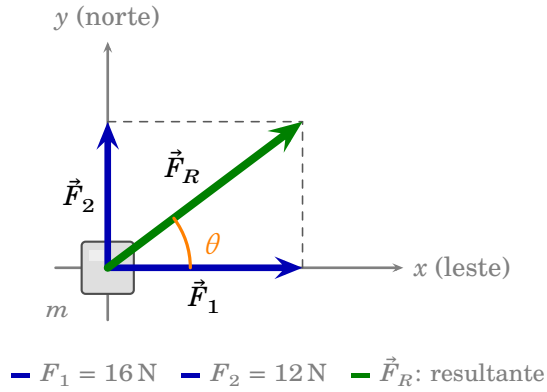


Figura 3.5

1 Compreender

O assunto é o **caráter vetorial da Segunda Lei**: as duas forças são perpendiculares, e a aceleração aponta na direção da resultante, não na direção de nenhuma das forças isoladamente.

Objetivo. Obter o módulo da aceleração e o ângulo que ela faz com o eixo x. O que está em jogo é escolher um dos dois caminhos equivalentes: somar as forças primeiro e dividir pela massa, ou aplicar a lei em cada eixo e compor as acelerações no final.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.5) e diga o que cada símbolo significa. Ela e a Equação (3.6) são a Segunda Lei eixo a eixo; o módulo e a direção do vetor saem depois, pelas Equações (1.4) e (1.5) do cap. 1.

2 Organizar

Dados $F_1 = 16\,\text{N}$ em x
$F_2 = 12\,\text{N}$ em y
$m = 4\,\text{kg}$
sem atrito.

Conversões nenhuma: forças em newtons e massa em kg.

Estratégia aplique $\sum F = ma$ em cada eixo, componha o módulo

por Pitágoras e a direção pela tangente.

3 **Resolver**

Segunda Lei em cada eixo. Divida cada força pela massa:

$$a_x = \frac{F_1}{m} = \frac{16}{4} = 4\,\text{m/s}^2$$
$$a_y = \frac{F_2}{m} = \frac{12}{4} = 3\,\text{m/s}^2$$

Módulo, pelo teorema de Pitágoras. Componha as duas acelerações:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$$

$$|\vec{a}| = 5\,\text{m/s}^2$$

Direção, pela tangente. É o ângulo com o eixo x:

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\theta \approx 37^\circ \text{ ao norte do leste}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 4, 3 e 5 formam o triângulo 3-4-5 do cap. 1, e a resultante das forças vale $\sqrt{16^2 + 12^2} = 20\,\text{N}$, que dividida por 4 kg dá os mesmos $5\,\text{m/s}^2$. Os dois caminhos coincidem porque dividir por m é uma operação escalar, que não muda a direção. Em problemas 2D, decomponha, some componente a componente e só depois componha o vetor resultante.

> **NOTA**
>
> Roteiro geral para problemas com a 2ª Lei:
>
> 1. Isole o corpo e desenhe seu DCL (seção 3.6 a seguir);
> 2. Escolha eixos convenientes;
> 3. Escreva $\sum F_x = m\,a_x$ e $\sum F_y = m\,a_y$;
> 4. Substitua valores e isole a incógnita;
> 5. Verifique unidades e razoabilidade do resultado.

3.4 Massa e Peso

Na linguagem cotidiana, "massa" e "peso" são usados como sinônimos: uma balança de açougue "pesa" em kg. Em Física, porém, são grandezas rigorosamente distintas. Confundi-las é um dos erros mais frequentes em provas de concurso.

3.4.1 Massa

A **massa** é a propriedade intrínseca da matéria que quantifica sua **inércia**.

- É grandeza **escalar**;
- É **invariante**: não depende de localização nem do campo gravitacional;
- Unidade SI: **quilograma** (kg);
- Medida por balança (comparação direta com massas-padrão).

3.4.2 Peso

DEFINIÇÃO 3.6 • Peso

O **peso** é a força gravitacional que um corpo sofre em um dado campo gravitacional. Tem a direção de $\vec{g}$ (a vertical local) e sentido para baixo, apontando para o centro da Terra.

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g} \tag{3.7}$$

$\vec{P}$: peso do corpo (N)
m: massa do corpo (kg)
$\vec{g}$: aceleração da gravidade local ($\mathrm{m/s^2}$)

- É grandeza **vetorial**;
- **Varia** com a localização (altitude, latitude, planeta);
- Unidade SI: **newton** (N);
- Medida por dinamômetro (mola calibrada).

3.4.3 Comparação Massa × Peso

Característica	Massa	Peso
Tipo de grandeza	Escalar	Vetorial
Unidade SI	kg	N
Varia com o local?	Não	Sim
Quantifica	Inércia (matéria)	Força gravitacional
Instrumento de medida	Balança	Dinamômetro

NOTA

A "balança de supermercado" mede, fisicamente, o peso; mas está calibrada para apresentar o resultado em kg *supondo* g local conhecido. É uma conveniência comercial, não uma identidade física.

EXEMPLO 3.10 • Peso de um astronauta na Terra

Um astronauta tem massa $m = 80\,\text{kg}$. Qual o seu peso na superfície terrestre, onde $g = 10\,\text{m/s}^2$?

1 Compreender

O assunto é a distinção entre **massa** e **peso**: a massa é dada, e o peso é a força com que a Terra puxa essa massa.

Objetivo. Obter o peso do astronauta na superfície da Terra. O que está em jogo é responder em newtons, não em quilogramas: peso é força.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.7) e diga o que cada símbolo significa. Com g dado, é uma multiplicação.

2 Organizar

Dados $m = 80\,\text{kg}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: kg vezes m/s^2 dá newton.

Estratégia aplique $P = mg$.

3 Resolver

Peso. Multiplique a massa pela aceleração da gravidade:

$$P = m \cdot g = 80 \times 10$$

$$\boxed{P = 800\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 800 N é a ordem de grandeza típica do peso de um adulto. No Equador, onde $g \approx 9{,}78\,\text{m/s}^2$, o mesmo astronauta pesaria cerca de 782 N, uma variação de pouco mais de 2%; sua massa

continuaria sendo 80 kg. Em provas, "$g = 10\,\text{m/s}^2$" é a convenção padrão da Cesgranrio.

> **EXEMPLO 3.11** • Peso do mesmo astronauta na Lua
>
> O mesmo astronauta de 80 kg do exemplo anterior é transportado para a Lua, onde $g_{\text{Lua}} = 1{,}6\,\text{m/s}^2$. Qual é a sua massa e qual é o seu peso na Lua?

1 Compreender

O assunto é a **invariância da massa**: a quantidade de matéria do astronauta não muda de um astro para outro; o que muda é a aceleração da gravidade, e com ela o peso.

Objetivo. Obter a massa e o peso do astronauta na Lua. O que está em jogo é não dividir a massa por seis: só o peso muda, e a primeira parte da pergunta não exige conta.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.7) e diga o que cada símbolo significa. A mesma massa, com outro g, dá outro peso.

2 Organizar

Dados $m = 80\,\text{kg}$
$g_{\text{Lua}} = 1{,}6\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: kg e m/s^2 dão newton.

Estratégia a massa é a mesma; o peso sai de $P = m\,g_{\text{Lua}}$.

3 Resolver

Massa. Ela é invariante:

$$m_{\text{Lua}} = 80\,\text{kg}$$

Peso na Lua. Multiplique pela gravidade lunar:

$$P_{\text{Lua}} = m \cdot g_{\text{Lua}} = 80 \times 1{,}6$$

$$P_{\text{Lua}} = 128\,\text{N}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $128/800 = 0{,}16$, exatamente a razão $g_{\text{Lua}}/g_{\text{Terra}} = 1{,}6/10$. É por isso que astronautas saltam com facilidade mesmo carregando trajes e equipamentos pesados: a *massa* do equipamento é a mesma da Terra, mas o *peso* é cerca de um sexto. **Cuidado com a**

pegadinha: a banca gosta de perguntar "a massa na Lua" esperando que o candidato divida por seis. A massa não muda.

3.4.4 Peso Aparente

Quando uma pessoa está sobre uma superfície acelerada (elevador, convés de plataforma em onda, avião em arremetida), a sensação de "peso" não é a do peso real $P = mg$, mas sim da força normal N que a superfície exerce sobre ela.

> DEFINIÇÃO 3.7 • Peso aparente
>
> **Peso aparente** é o módulo da força normal que uma superfície de apoio exerce sobre um corpo. Quando o apoio acelera para cima, a normal supera o peso e a pessoa se sente mais pesada; quando acelera para baixo, a normal fica menor que o peso e a pessoa se sente mais leve; em queda livre, a normal se anula e surge a sensação de "ausência de peso".

Não há equação nova aqui. Escreva a Segunda Lei no eixo vertical, positivo para cima, com a normal a favor e o peso contra, e isole N:

$$\begin{aligned} N - mg &= m\,a \\ N &= m\,(g + a) \end{aligned}$$

com a positiva quando o apoio acelera para cima e negativa quando acelera para baixo. É a Equação (3.6) com os nomes do problema, e o exemplo a seguir a refaz com números.

EXEMPLO 3.12 • Pessoa em elevador acelerando

Uma pessoa de $m = 60\,\text{kg}$ está dentro de um elevador que sobe com aceleração vertical $a = 2\,\text{m/s}^2$. Qual o peso aparente sobre ela (força normal do piso do elevador)? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

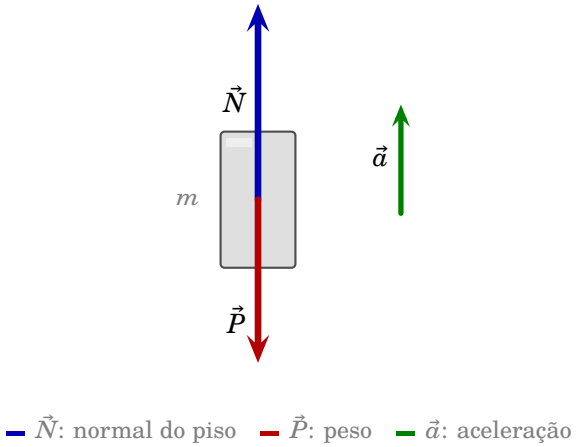


Figura 3.6

1 Compreender

O assunto é o **peso aparente**: a pessoa acelera para cima junto com o elevador, então a força resultante sobre ela aponta para cima, e a normal do piso precisa superar o peso.

Objetivo. Obter a força normal que o piso do elevador exerce sobre a pessoa. O que está em jogo é o sinal da aceleração, que vem do sentido em que o elevador acelera e não do sentido em que ele se move.

Antes de seguir, releia a Definição 3.7 e diga com suas palavras o que ela afirma. Duas forças agem na pessoa, o peso (Terra) e a normal (piso), e a Equação (3.6) liga as duas à aceleração.

2 Organizar

Dados $m = 60\,\text{kg}$
$a = 2\,\text{m/s}^2$, para cima
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: massa em kg e acelerações em m/s^2.

Estratégia eixo vertical positivo para cima; escreva $\sum F_y = ma$ com N para cima e $P = mg$ para baixo.

3 Resolver

Segunda Lei na vertical. Escreva-a com o eixo positivo para cima e isole N:

$$N - mg = ma$$
$$N = m\,(g + a)$$

Valor da normal. Substitua os valores:

$$N = 60 \times (10 + 2) = 60 \times 12$$

$$\boxed{N = 720\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $N = 720\,\text{N}$ supera o peso $P = 600\,\text{N}$, como deve ser quando a aceleração é para cima. A pessoa se sente 120 N mais pesada, o equivalente ao peso de 12 kg a mais. É a sensação em elevadores, em aviões arremetendo e no convés de uma plataforma que sobe com a onda. No cap. 5 (Fluidos), você verá uma situação análoga em mergulho, em que o empuxo substitui a normal como "apoio". **Cuidado com a pegadinha:** o sinal de a vem do sentido da *aceleração*, não do movimento. Um elevador que desce *freando* tem aceleração para cima, e a normal também supera o peso.

> **NOTA**
>
> Casos-limite do peso aparente:
>
> - **Elevador subindo acelerando**: $N > P$ (sente-se mais pesado);
> - **Elevador descendo acelerando**: $N < P$ (sente-se mais leve);
> - **Elevador em MRU ou em repouso**: $N = P$ (peso normal);
> - **Queda livre** ($a = -g$): $N = 0$ ("ausência de peso").
>
> Note que na queda livre *não há* ausência de gravidade; há ausência de *normal*. O peso continua atuando.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2012
Um paraquedista de massa 70 kg encontra-se em queda vertical. Durante um trecho da queda, a sua aceleração é constante, direcionada para cima e possui módulo de $0{,}60\,\text{m/s}^2$. O atrito entre o paraquedista e o ar é desprezível. O módulo, em N, da resultante das forças que as cordas do paraquedas exercem sobre o paraquedista é, aproximadamente, de
Dado: aceleração da gravidade $= 10\,\text{m/s}^2$

(A) 600
(B) 658
(C) 700
(D) 742
(E) 770

5YBBXP

3.5 Terceira Lei de Newton (Ação e Reação)

A **Terceira Lei de Newton**, ou **Lei da Ação e Reação**, completa o conjunto das leis da Mecânica Clássica. Ela afirma que forças nunca ocorrem isoladas: sempre em pares.

DEFINIÇÃO 3.8 • Terceira Lei de Newton: Ação e Reação

Quando um corpo A exerce uma força sobre um corpo B, o corpo B exerce simultaneamente sobre A uma força de mesmo módulo, mesma direção e sentido oposto. As duas forças de um **par ação-reação** atuam em corpos diferentes, e por isso nunca se anulam.

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A} \tag{3.8}$$

$\vec{F}_{A\to B}$: força que A exerce sobre B (N)
$\vec{F}_{B\to A}$: força que B exerce sobre A (N)

3.5.1 Características do Par Ação-Reação

- Possuem **mesmo módulo**;
- Possuem **mesma direção**;
- Possuem **sentidos opostos**;
- Atuam em **corpos diferentes** (este é o ponto crítico);

- Surgem e desaparecem **simultaneamente**: não há "ação primeiro, reação depois".

ATENÇÃO

Um par ação-reação **jamais** atua no mesmo corpo. Portanto, *as forças de um par ação-reação nunca se anulam*: cada uma produz seu próprio efeito em seu próprio corpo. Esta é a armadilha conceitual mais frequente em provas de Terceira Lei.

EXEMPLO 3.13 • Livro sobre a mesa: identificando pares ação-reação

Um livro de $m = 2\,\text{kg}$ está em repouso sobre uma mesa horizontal. Identifique todas as forças atuantes sobre ele e os respectivos pares ação-reação. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

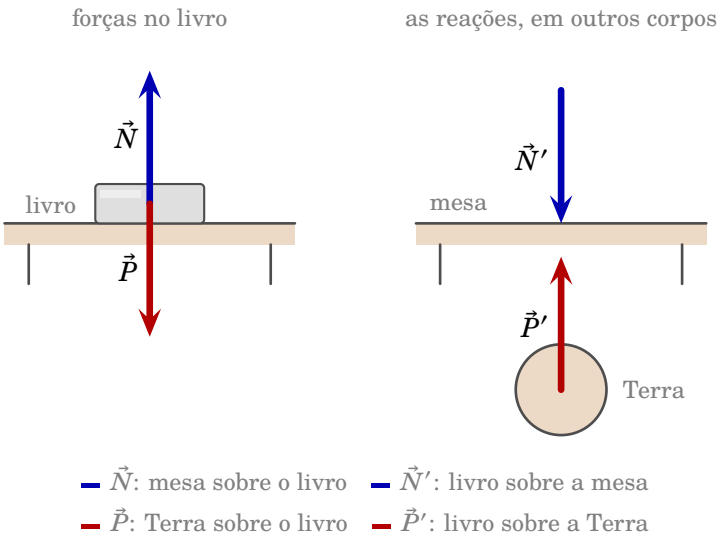


Figura 3.7

DICA

"A sobre B" e "B sobre A", sempre em *corpos distintos*. Se as duas forças atuam no mesmo corpo, não são par ação-reação.

1 Compreender

O assunto é a **Terceira Lei**: cada força que age no livro é metade de um par, e a outra metade age em outro corpo.

Objetivo. Nomear as quatro forças dos dois pares ação-reação e dizer em que corpo cada uma age. O que está em jogo é contar interações, não forças: o livro interage com dois corpos, a Terra (à distância, pelo peso) e a mesa (por contato, pela normal), então há dois pares.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.8) e diga o que cada símbolo significa. Peso e normal agem no mesmo corpo, e por isso não são um par.

2 Organizar

Dados $m = 2\,\text{kg}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
livro em repouso.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2 dão o peso em newtons.

Esquema interações: livro ↔ Terra (gravitacional)
livro ↔ mesa (contato).

Estratégia calcule o peso, depois escreva cada par na forma "A sobre B" e "B sobre A".

3 Resolver

Peso do livro. Calcule-o:

$$P = mg = 2 \times 10 = 20\,\text{N}$$

Par gravitacional, livro e Terra. Escreva as duas forças:

- Terra puxa o livro para baixo: $\vec{F}_{\text{Terra}\to\text{livro}}$, de 20 N (é o peso $\vec{P}$);
- Livro puxa a Terra para cima: $\vec{F}_{\text{livro}\to\text{Terra}}$, de 20 N ($\vec{P}\,'$ na figura).

Par de contato, livro e mesa. Escreva as duas forças:

- Mesa empurra o livro para cima: $\vec{F}_{\text{mesa}\to\text{livro}}$, de 20 N (é a normal $\vec{N}$);
- Livro empurra a mesa para baixo: $\vec{F}_{\text{livro}\to\text{mesa}}$, de 20 N ($\vec{N}'$ na figura).

> Dois pares: $\vec{P}$ e $\vec{P}\,'$ (livro e Terra), $\vec{N}$ e $\vec{N}'$ (livro e mesa). O peso e a normal atuam sobre o mesmo corpo, o livro, e se equilibram, mas não formam um par ação-reação.

4 Avaliar

Avalie a coerência: em cada par, as duas forças têm o mesmo módulo e agem em corpos diferentes, como a lei exige; já $\vec{P}$ e $\vec{N}$ têm o mesmo módulo porque o livro está em equilíbrio (1ª Lei), não por serem um par. Se o livro estivesse num elevador acelerando, N seria diferente de P, e cada par continuaria com módulos iguais. **Cuidado com a pegadinha:** a Cesgranrio pergunta "qual é a reação da normal?". A resposta é "a força do livro sobre a mesa", não "o peso". O peso pertence ao par gravitacional.

EXEMPLO 3.14 • Pessoa empurrando uma parede

Uma pessoa empurra horizontalmente uma parede com força de $F = 100\,\text{N}$. A parede não se move. Qual a força que a parede exerce sobre a pessoa?

1 Compreender

O assunto é a **Terceira Lei**: a força da pessoa sobre a parede e a força da parede sobre a pessoa formam um par ação-reação.

Objetivo. Obter o módulo e o sentido da força que a parede exerce sobre a pessoa. O que está em jogo é ver que o fato de a parede não se mover não altera o par; só diz que a parede está presa a algo.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.8) e diga o que cada símbolo significa. Mesmo módulo, mesma direção, sentidos opostos, corpos diferentes.

2 Organizar

Dados $F_{\text{pessoa}\to\text{parede}} = 100\,\text{N}$, horizontal
parede em repouso.

Conversões nenhuma: a força já está em newtons.

Estratégia aplique $\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$.

3 Resolver

Terceira Lei no par pessoa-parede. Os módulos são iguais:

$$F_{\text{parede}\to\text{pessoa}} = F_{\text{pessoa}\to\text{parede}}$$

$$\boxed{F_{\text{parede}\to\text{pessoa}} = 100\,\text{N}}$$

Sentido oposto ao do empurrão: a parede empurra a pessoa para trás.

4 Avaliar

Avalie a coerência: a parede não se move porque está fixada à estrutura do prédio, que se apoia nas fundações e, em última instância, na Terra. A pessoa, por sua vez, só consegue empurrar porque o atrito com o piso a segura; sem atrito nos pés, ela deslizaria para trás ao tentar empurrar qualquer coisa. É o mesmo motivo pelo qual um rebocador precisa de hélice: para empurrar a plataforma, ele empurra a água para trás.

NOTA

Erros clássicos de Terceira Lei em provas:

- Dizer que "a ação vem antes da reação": são simultâneas;
- Dizer que "o par ação-reação se anula": atua em corpos diferentes;
- Confundir o par ação-reação com duas forças que equilibram o mesmo corpo (como peso e normal);
- Afirmar que um cavalo puxa uma carroça porque "a força do cavalo é maior que a reação da carroça". As forças são iguais; a carroça se move porque o atrito dos cascos do cavalo com o solo (externo ao par carroça-cavalo) fornece a força resultante sobre o sistema.

3.6 Diagramas de Corpo Livre

O **diagrama de corpo livre** (DCL) é a ferramenta mais importante para resolver problemas de Dinâmica. Consiste em isolar um único corpo de seu entorno e representar graficamente todas as forças externas que sobre ele atuam, e nada mais. Desenhar um DCL correto é, quase sempre, metade do trabalho de resolver um problema de forças.

3.6.1 Como Construir um DCL

ESTRATÉGIA

Roteiro para construir um DCL:

1. **Isole** mentalmente o corpo de interesse;
2. **Identifique** cada corpo que interage com ele (o piso, um cabo, a Terra, outro bloco, o ar, um fluido);
3. Para cada interação identificada, **desenhe** a força que esse corpo exerce *sobre* o corpo de interesse;
4. **Escolha** um sistema de eixos alinhado à aceleração (se houver) ou à superfície de apoio (em planos inclinados);
5. **Decomponha** forças inclinadas nas direções dos eixos;
6. **Escreva** $\sum F_x$ e $\sum F_y$ e aplique a lei pertinente (1ª ou 2ª).

3.6.2 Forças Comuns em DCLs

- **Peso** ($\vec{P} = m\vec{g}$): sempre vertical, para baixo;

- **Normal** ($\vec{N}$): sempre perpendicular à superfície de contato, apontando para fora dela;
- **Atrito** ($\vec{f}$): paralelo à superfície de contato, oposto ao movimento (ou à tendência de movimento);
- **Tração** ($\vec{T}$): ao longo do fio ou cabo, sempre puxando o corpo (nunca empurrando);
- **Força aplicada** ($\vec{F}$): conforme descrita no enunciado;
- **Força elástica** ($\vec{F}_{el} = -kx$): oposta à deformação da mola.

EXEMPLO 3.15 • DCL de um bloco sobre superfície horizontal

Desenhe o DCL de um bloco de $m = 5\,\text{kg}$ em repouso sobre uma superfície horizontal, sem forças horizontais aplicadas. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

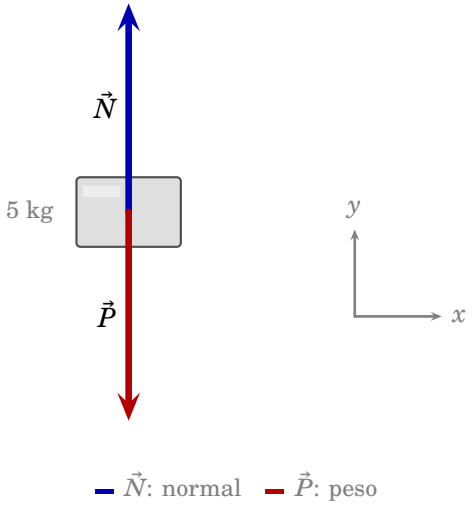


Figura 3.8

1 Compreender

O assunto é o **diagrama de corpo livre** mais simples que existe: o bloco interage com a Terra (peso) e com o piso (normal), e nada mais.

Objetivo. Desenhar o DCL do bloco e obter o módulo de cada força. O que está em jogo é não desenhar força que não existe: sem força horizontal nem tendência de movimento, não há atrito.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.3) e diga o que cada símbolo significa. Em repouso, as duas forças verticais se equilibram.

2 Organizar

Dados $m = 5\,\text{kg}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
repouso
sem forças horizontais.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2.

Estratégia desenhe $\vec{P}$ para baixo e $\vec{N}$ para cima, ambas saindo do centro do bloco, e imponha $\sum F_y = 0$.

3 Resolver

Peso. Calcule-o:

$$P = mg = 5 \times 10 = 50\,\text{N}$$

Equilíbrio na vertical. Com o eixo positivo para cima:

$$N - P = 0$$

$$\boxed{N = P = 50\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: duas forças de mesmo módulo e sentidos opostos, equilíbrio. Este DCL é o ponto de partida para qualquer problema com bloco apoiado; a partir dele, você acrescenta outras forças conforme o enunciado (puxões, atritos, empurrões), e a normal deixa de ser igual ao peso assim que aparecer outra força com componente vertical.

EXEMPLO 3.16 • DCL em plano inclinado sem atrito

Um bloco de massa m repousa sobre um plano inclinado de $\theta = 30°$ com a horizontal, sem atrito. Desenhe o DCL e decomponha o peso em componentes paralela e perpendicular ao plano. Use $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$ e $\cos 30° = 0{,}866$.

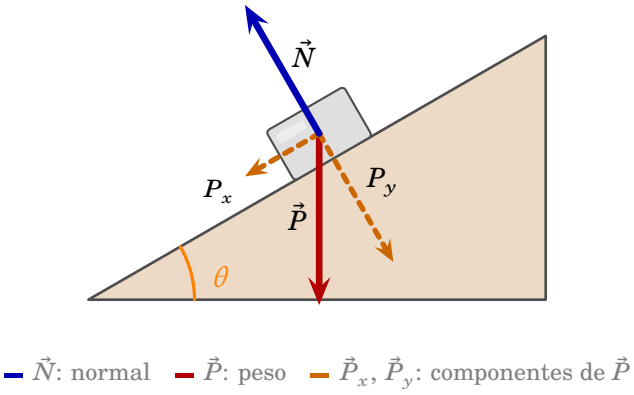


Figura 3.9

1 Compreender

O assunto é o **plano inclinado**, em que a escolha dos eixos faz toda a diferença: alinhe x ao plano (rampa abaixo) e y perpendicular a ele (para fora).

Objetivo. Desenhar o DCL do bloco, decompor o peso nos eixos do plano e obter a normal. O que está em jogo é saber qual componente leva o seno: a que desce a rampa leva o seno do ângulo com a horizontal, e a perpendicular leva o cosseno.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.7) e diga o que cada símbolo significa. Com os eixos alinhados ao plano, a normal fica sobre y e só o peso precisa ser decomposto, pelas Equações (1.2) e (1.3) do cap. 1.

2 Organizar

Dados $\theta = 30°$
sem atrito
massa m genérica.

Conversões nenhuma: o resultado sai em função de m e g.

Esquema $\vec{P} = m\vec{g}$ (vertical, para baixo) e $\vec{N}$ (perpendicular à rampa).

Estratégia decomponha $\vec{P}$ em P_x (paralela, rampa abaixo) e P_y (perpendicular, contra o plano), e imponha o equilíbrio em y.

3 Resolver

Componentes do peso. Nos eixos do plano, a componente paralela leva o seno e a perpendicular leva o cosseno:

$$P_x = P\,\mathrm{sen}\,\theta = mg\,\mathrm{sen}\,30° = 0{,}5\,mg$$
$$P_y = P\cos\theta = mg\cos 30° = 0{,}866\,mg$$

Equilíbrio perpendicular ao plano. O bloco não afunda na rampa nem sai dela:

$$N - P_y = 0$$

$$\boxed{N = mg\cos\theta = 0{,}866\,mg}$$

Direção paralela. Sem atrito, o bloco *não* está em equilíbrio: sobra a força resultante $P_x = 0{,}5\,mg$ rampa abaixo, que o acelera.

4 **AVALIAR**

Avalie a coerência pelos casos-limite: para $\theta = 0°$ (plano horizontal), $N = P$ e $P_x = 0$; para $\theta = 90°$ (parede vertical), $N = 0$ e $P_x = P$, queda livre. Entre os dois, $N < P$: quanto mais íngreme a rampa, menor a normal. Este exemplo é pré-requisito para a 2ª Lei em plano inclinado (seção 3.9). **Cuidado com a pegadinha:** trocar seno por cosseno é o erro mais frequente da Cesgranrio em plano inclinado. Guarde: a componente que *desce* a rampa leva o seno do ângulo com a horizontal.

DICA

Memorize: $P_x = mg \operatorname{sen}\theta$ "desce" a rampa; $P_y = mg\cos\theta$ é equilibrada pela normal.

EXEMPLO 3.17 • DCL de sistema com polia (Máquina de Atwood)

Dois blocos de massas $m_1 = 3\,\text{kg}$ e $m_2 = 5\,\text{kg}$ estão conectados por um fio inextensível e de massa desprezível que passa por uma polia ideal. O bloco 1 está sobre uma mesa horizontal sem atrito; o bloco 2 pende verticalmente. Desenhe o DCL de cada bloco e discuta o papel da tração.

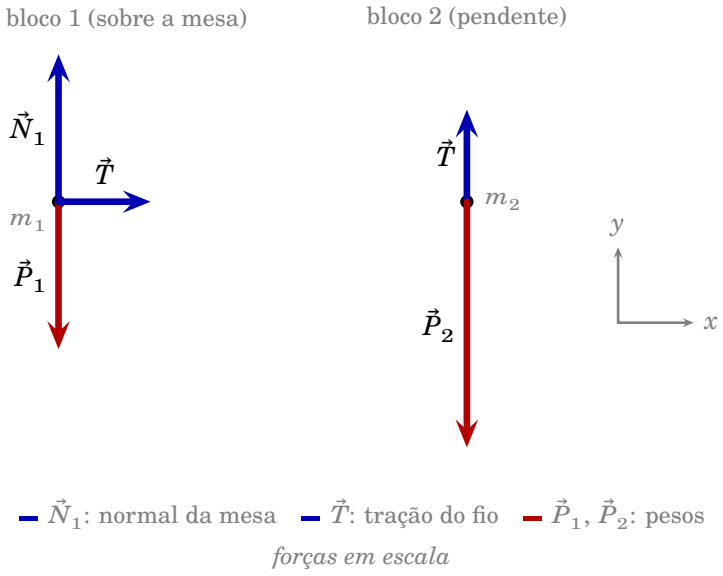


Figura 3.10

1 **COMPREENDER**

O assunto é o **DCL de um sistema**: cada bloco recebe seu próprio diagrama, e o que os liga é o fio.

Objetivo. Desenhar o DCL de cada bloco e dizer o que a tração faz em cada um. O que está em jogo é ver que o fio transmite a mesma tração às duas pontas e impõe a mesma aceleração aos dois blocos, em direções diferentes.

Antes de seguir, releia a Definição 3.1 e diga com suas palavras o que ela afirma. Com polia e fio ideais, a tração tem o mesmo módulo T

nas duas pontas, e, como o fio não estica, os dois blocos têm a mesma aceleração em módulo.

2 Organizar

Dados $m_1 = 3\,\text{kg}$ na mesa, sem atrito
$m_2 = 5\,\text{kg}$ pendurado
fio e polia ideais.

Conversões nenhuma: a análise é qualitativa, sem conta.

Esquema bloco 1: $\vec{P}_1$ (para baixo), $\vec{N}_1$ (para cima, da mesa) e $\vec{T}$ (horizontal, para a polia)
bloco 2: $\vec{P}_2$ (para baixo) e $\vec{T}$ (para cima, ao longo do fio).

Estratégia identifique a força resultante em cada bloco sem ainda resolver as equações.

3 Resolver

Bloco 1. Na vertical, N_1 equilibra P_1, porque o bloco não sai da mesa; na horizontal, a tração é a *única* força, logo é a resultante que o acelera para a polia.

Bloco 2. As duas forças são verticais, e a resultante é a diferença $P_2 - T$, para baixo, que o acelera na descida.

Vínculo do fio. Inextensível, ele impõe que a aceleração horizontal do bloco 1 tenha o mesmo módulo da aceleração vertical do bloco 2.

> O sistema acelera no sentido de descer o bloco 2: m_2 desce e m_1 avança sobre a mesa, ambos com a mesma aceleração em módulo; a tração é a força que transmite o puxão de um bloco ao outro.

4 Avaliar

Avalie a coerência: a tração precisa ser menor que P_2 (senão o bloco 2 não desceria) e maior que zero (senão o bloco 1 não se moveria); o valor exato sai da 2ª Lei aplicada a cada DCL, na seção 3.9. Este é o arranjo da Máquina de Atwood horizontal, que aparece em sistemas de reboque com contrapeso. O DCL não resolve o problema, mas organiza as forças de modo que a solução vire duas equações simples.

3.7 Aplicação da Primeira Lei: Partículas em Equilíbrio

Quando um corpo pode ser tratado como uma partícula, ou seja, quando todas as forças podem ser consideradas aplicadas a um único ponto, e está em equilíbrio (repouso ou MRU), vale $\sum \vec{F} = \vec{0}$. A técnica

de solução consiste em decompor as forças em dois eixos perpendiculares e impor o equilíbrio em cada um deles.

DEFINIÇÃO 3.9 • Equilíbrio de uma partícula

Uma partícula está em **equilíbrio** se, e somente se, a força resultante sobre ela é nula. Em duas dimensões, isso equivale a duas condições independentes, uma por eixo.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \iff \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

$\sum F_x$: soma das componentes das forças no eixo x (N)
$\sum F_y$: soma das componentes das forças no eixo y (N)

EXEMPLO 3.18 • Corpo suspenso por cabo vertical

Um corpo de peso $P = 2\,000\,\text{N}$ é sustentado em repouso por um único cabo vertical. Qual a tração no cabo?

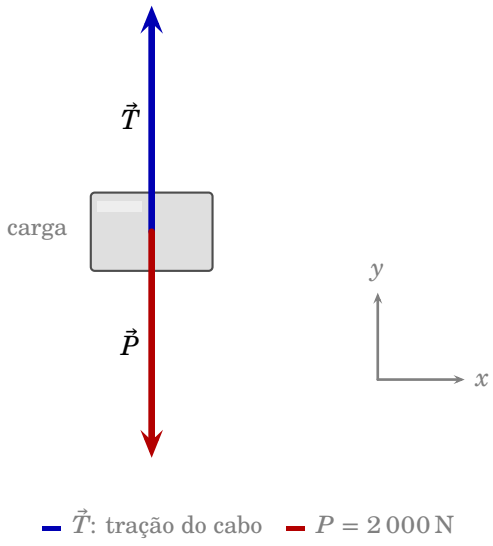


Figura 3.11

1 Compreender

O assunto é o **equilíbrio** mais simples com cabo: duas forças verticais e colineares, o peso para baixo e a tração para cima, e o corpo em repouso.

Objetivo. Obter a tração no cabo. O que está em jogo é aplicar a condição de equilíbrio em um só eixo, porque as duas forças são colineares.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.9) e diga o que cada símbolo significa. Aqui só a segunda condição, no eixo vertical, tem conteúdo.

2 Organizar

Dados $P = 2\,000\,\text{N}$
corpo em repouso
um único cabo vertical.

Conversões nenhuma: o peso já vem em newtons.

Estratégia eixo vertical positivo para cima; imponha $\sum F_y = 0$.

3 Resolver

Equilíbrio na vertical. Imponha $\sum F_y = 0$:

$$T - P = 0$$

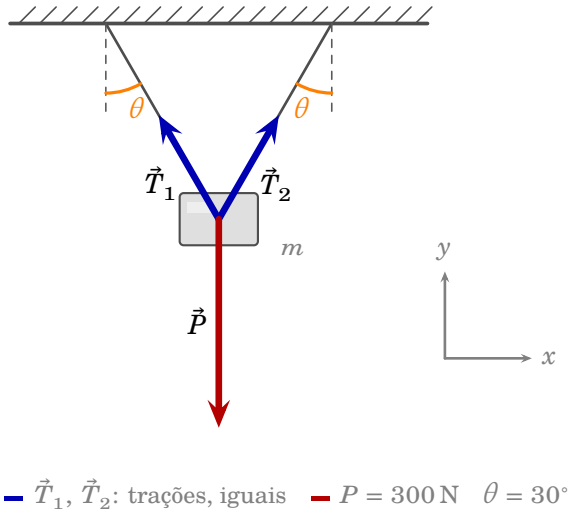
$$\boxed{T = P = 2\,000\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: quando uma carga está suspensa por um único cabo vertical em repouso, a tração é sempre igual ao peso total sustentado. Esse resultado "óbvio" serve de referência para os problemas de dois cabos: se, num deles, uma tração sair maior que o peso total, isso só é possível quando o cabo é inclinado (veja os dois exemplos a seguir); se o cabo é vertical, alguma coisa está errada na conta.

EXEMPLO 3.19 • Corpo suspenso por dois cabos simétricos

Um corpo de $m = 30\,\text{kg}$ é suspenso em repouso por dois cabos idênticos, fixados ao teto, cada um formando um ângulo de $\theta = 30°$ com a vertical. Determine a tração em cada cabo. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$ e $\cos 30° = 0{,}866$.



$\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$: trações, iguais — $P = 300\,\text{N}$ $\theta = 30°$

Figura 3.12

1 Compreender

O assunto é o **equilíbrio com forças inclinadas**: três forças agem no corpo, o peso e as duas trações.

Objetivo. Obter a tração em cada cabo. O que está em jogo é usar a simetria, que dá às duas trações o mesmo módulo T, e saber que o ângulo é medido com a vertical, então a componente vertical de cada tração leva o cosseno.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.9) e diga o que cada símbolo significa. As componentes horizontais das trações se anulam entre si, e apenas as componentes verticais sustentam o peso.

2 Organizar

Dados $m = 30\,\text{kg}$
$\theta = 30°$ com a vertical
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\cos 30° = 0{,}866$.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2 dão o peso em newtons.

Estratégia calcule $P = mg$; como o ângulo é com a vertical, a componente vertical de cada tração é $T\cos\theta$; imponha $\sum F_y = 0$.

3 **Resolver**

Peso. Calcule-o:

$$P = mg = 30 \times 10 = 300\,\text{N}$$

Equilíbrio na vertical. As duas componentes $T\cos\theta$ apontam para cima e o peso para baixo; isole T:

$$2T\cos\theta - P = 0$$

$$T = \frac{P}{2\cos\theta} = \frac{300}{2 \times 0{,}866} = \frac{300}{1{,}732}$$

$$\boxed{T \approx 173\,\text{N}}$$

4 **Avaliar**

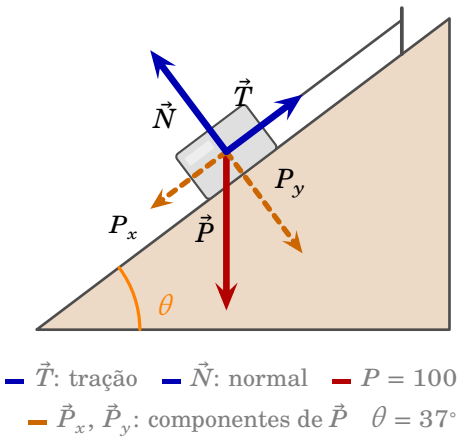
Avalie a coerência: $T \approx 173\,\text{N}$ é *maior* que $P/2 = 150\,\text{N}$, porque parte do esforço de cada cabo é gasto puxando para o lado, e só a componente vertical sustenta o peso. Nos casos-limite, $\theta \to 0$ dá $T \to P/2$ (cada cabo sustenta metade) e $\theta \to 90°$ dá $T \to \infty$. É por isso que, em içamento, normas de *rigging* limitam o ângulo de abertura entre os cabos: quanto mais abertos, maior a tração, mesmo com carga modesta. **Cuidado com a pegadinha:** o ângulo aqui é com a *vertical*, e por isso a componente vertical leva o cosseno. Se o enunciado desse o ângulo com o teto (horizontal), seria o seno.

NOTA

Em *rigging* industrial, normas técnicas limitam o ângulo entre cabos de içamento justamente para controlar a tração de trabalho.

EXEMPLO 3.20 • Bloco em plano inclinado liso seguro por fio

Um bloco de $m = 10\,\text{kg}$ repousa em equilíbrio sobre um plano inclinado liso de $37°$, preso por um fio ideal paralelo ao plano. Determine a tração no fio e a força normal do plano sobre o bloco. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$, $\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$, $\cos 37° = 0{,}8$.



$\vec{T}$: tração — $\vec{N}$: normal — $P = 100\,\text{N}$
$\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$: componentes de $\vec{P}$ — $\theta = 37°$

Figura 3.13

1 Compreender

O assunto é o **equilíbrio em plano inclinado**: três forças agem no bloco, o peso, a normal e a tração.

Objetivo. Obter a tração no fio e a normal do plano sobre o bloco. O que está em jogo é alinhar os eixos ao plano, para que a tração fique sobre x e a normal sobre y, e só o peso precise ser decomposto; cada componente dele é equilibrada por uma das outras forças.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.9) e diga o que cada símbolo significa. Uma condição por eixo, e cada uma dá uma das incógnitas.

2 Organizar

Dados $m = 10\,\text{kg}$
$\theta = 37°$
sem atrito
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$
$\cos 37° = 0{,}8$.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2.

Estratégia eixos x paralelo à rampa (positivo subindo) e y perpendicular (positivo afastando-se do plano); decomponha o peso e imponha $\sum F_x = 0$ e $\sum F_y = 0$.

3 Resolver

Peso e componentes. Calcule o peso e decomponha-o nos eixos do plano:

$$P = mg = 10 \times 10 = 100\,\text{N}$$
$$P_x = P\operatorname{sen}\theta = 100 \times 0{,}6 = 60\,\text{N} \quad \text{(rampa abaixo)}$$
$$P_y = P\cos\theta = 100 \times 0{,}8 = 80\,\text{N} \quad \text{(contra o plano)}$$

Equilíbrio ao longo da rampa. A tração segura a componente paralela do peso:

$$T - P_x = 0$$

$$\boxed{T = 60\,\text{N}}$$

Equilíbrio perpendicular à rampa. A normal equilibra a componente perpendicular:

$$N - P_y = 0$$

$$N = 80\,\text{N}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: $\sqrt{T^2 + N^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\,\text{N} = P$. A resultante das forças de apoio (tração mais normal) é igual em módulo e oposta ao peso, exatamente o que a 1ª Lei exige. Repare também que $T < P$: o fio sustenta só a parte do peso que "desce" a rampa, e é por isso que rampas e planos inclinados são usados para içar cargas com menos força.

CAIU NA PETROBRAS

D7VJ3Q

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Um bloco de massa $m = 20\,\text{kg}$ está suspenso por um sistema de cabos, conforme mostrado na figura. O cabo A é preso ao teto e faz um ângulo de 30° com a horizontal. O cabo B é perpendicular à direção vertical. Considerando-se que o bloco está em equilíbrio estático, qual o valor, em newtons, do módulo da tensão no cabo A?

Dados: $\operatorname{sen} 30° = 0{,}50$; $\cos 30° = 0{,}86$; $g = 10\,\text{m/s}^2$.

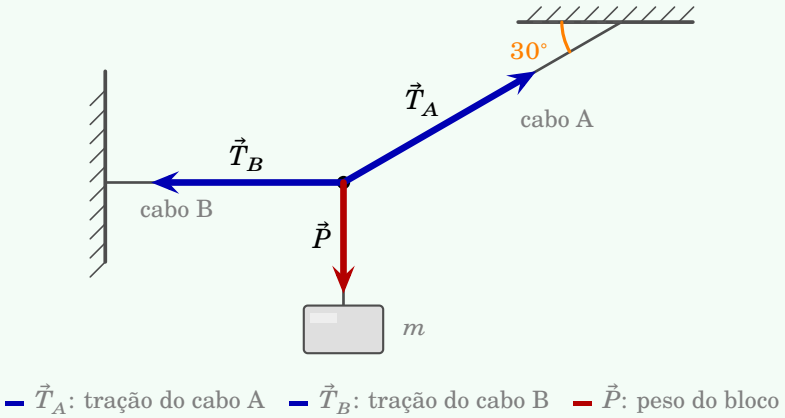


Figura 3.14

(A) 400

(B) $400\sqrt{3}$

(C) 200

(D) $200\sqrt{3}$

(E) 40

3.8 Equilíbrio de Corpo Extenso: Torque e Alavancas

Até aqui o corpo foi tratado como partícula: todas as forças aplicadas num ponto, e a única pergunta era se a resultante se anulava. Uma barra, uma porta ou uma chave de válvula não cabem nesse modelo. Nelas importa *onde* cada força é aplicada, porque uma força fora do eixo tende a girar o corpo mesmo quando a resultante é nula. A grandeza que mede essa tendência é o torque, apresentado no cap. 1 como produto vetorial (Definição 1.10); aqui você vai usá-lo no plano, com sinal, para resolver o tipo de problema que a banca cobra: barra apoiada, gangorra, balança adaptada, alavanca.

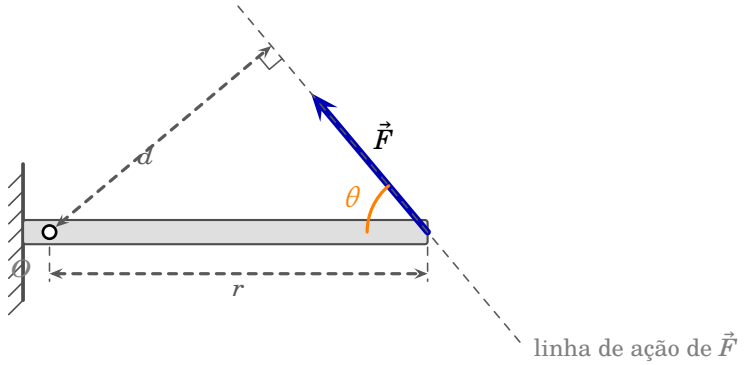
3.8.1 Torque de uma Força

DEFINIÇÃO 3.10 • Torque em relação a um eixo

O **torque** (ou momento) de uma força $\vec{F}$ em relação a um eixo que passa pelo ponto O é o produto do módulo da força pelo **braço de alavanca** d, que é a distância de O à linha de ação da força. Convenção de sinal: positivo quando a força tende a girar o corpo no sentido anti-horário, negativo no sentido horário.

$$\tau = \pm F d = \pm F r \operatorname{sen}\theta \tag{3.10}$$

τ: torque da força em relação ao eixo por O (N · m)
F: módulo da força (N)
d: braço de alavanca: distância de O à linha de ação (m)
r: distância de O ao ponto de aplicação da força (m)
θ: ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{F}$



$\vec{F}$: força aplicada $d = r \operatorname{sen}\theta$: braço de alavanca
O é o eixo de rotação, perpendicular à página

Figura 3.15

A Figura 3.15 mostra a construção que resolve quase tudo: prolongue a linha de ação da força e meça a distância perpendicular do eixo até ela. Quando a força é perpendicular à barra, $\theta = 90°$ e $d = r$; quando a linha de ação passa pelo eixo, $d = 0$ e a força não gira nada, por maior que seja. É por isso que empurrar uma porta na dobradiça não a abre, e por isso o cano enfiado na chave (o "extensor" das oficinas) solta o parafuso que a chave sozinha não solta: a força é a mesma, o braço é maior.

NOTA

Torque e trabalho têm a mesma unidade de base, N·m, mas o torque não se escreve em joule: o joule é reservado para energia (cap. 1).

3.8.2 Condições de Equilíbrio

DEFINIÇÃO 3.11 • Equilíbrio de um corpo extenso

Um corpo extenso está em **equilíbrio estático** quando duas condições valem ao mesmo tempo: a resultante das forças é nula (ele não translada) e a soma dos torques em relação a qualquer eixo é nula (ele não gira).

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \qquad \text{e} \qquad \sum \tau_O = 0 \tag{3.11}$$

$\sum \vec{F}$: soma vetorial das forças sobre o corpo (N)
$\sum \tau_O$: soma dos torques, com sinal, em relação a um eixo por O (N · m)

Duas escolhas tornam a conta curta. A primeira é o **polo**, o ponto O em relação ao qual você calcula os torques: como a condição vale para qualquer eixo, escolha o ponto por onde passa a força que você não conhece, porque ali o braço dela é zero e ela some da equação. A segunda é o ponto de aplicação do peso de um corpo homogêneo: ele age no **centro de gravidade**, que numa barra homogênea é o ponto médio.

DICA

Numa barra apoiada em dois pontos, tome o polo num dos apoios: a reação dele desaparece da equação de torques e a outra sai direto. A primeira condição, $\sum F_y = 0$, dá a reação que faltou.

EXEMPLO 3.21 • Barra sobre dois apoios

Uma barra homogênea de 4,0 m e peso 200 N está apoiada nas extremidades A e B. Sobre ela há uma caixa de 600 N, com o centro a 1,0 m de A. Determine as reações dos dois apoios.

1 **Compreender**

O assunto é o **equilíbrio de corpo extenso**: a barra não gira nem translada, e as duas reações são desconhecidas.

Objetivo. Obter N_A e N_B. O que está em jogo é uma equação de torques com polo bem escolhido e a equação de forças na vertical.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.11) e diga o que cada símbolo significa. O peso da barra age no centro dela, a 2,0 m de cada apoio.

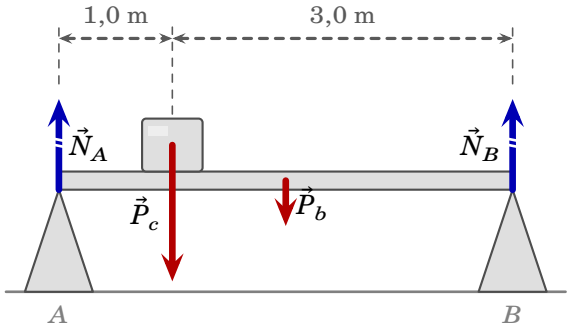
2 Organizar

Dados $L = 4{,}0\,\text{m}$
$P_b = 200\,\text{N}$, no centro
$P_c = 600\,\text{N}$, a 1,0 m de A
apoios em A e B.

Conversões nenhuma: comprimentos em metros e pesos em newtons.

Esquema a figura logo abaixo: pesos para baixo, reações para cima, distâncias medidas a partir de A.

Estratégia polo em A, porque N_A passa por ele; torques anti-horários positivos; depois $\sum F_y = 0$.



$P_c = 600\,\text{N}$ $P_b = 200\,\text{N}$ $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$: reações dos apoios

pesos em escala; as reações são as incógnitas, no piso, com marca de ruptura

Figura 3.16

3 Resolver

Torques em relação a A. N_B tende a girar a barra no sentido anti-horário; os dois pesos, no horário:

$$N_B \times 4{,}0 - 200 \times 2{,}0 - 600 \times 1{,}0 = 0$$
$$4{,}0\,N_B = 1\,000$$

$$\boxed{N_B = 250\,\text{N}}$$

Equilíbrio na vertical. As duas reações sustentam os dois pesos:

$$N_A + N_B - 200 - 600 = 0$$
$$N_A = 800 - 250$$

$$\boxed{N_A = 550\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a caixa está mais perto de A, então A tinha de receber a maior parte da carga, e as duas reações somam 800 N, o peso total. Confira pelo outro polo: em relação a B, $N_A \times 4{,}0 = 200 \times 2{,}0 + 600 \times 3{,}0 = 2\,200$, e $N_A = 550$ N, o mesmo valor. É assim que se dimensiona o suporte de uma tubulação com uma válvula pesada perto de um dos apoios: o suporte vizinho recebe quase todo o peso dela. **Cuidado com a pegadinha:** esquecer o peso da barra, ou usar a distância da caixa até B quando o polo é A. Escreva ao lado de cada força a distância até o polo escolhido antes de montar a soma.

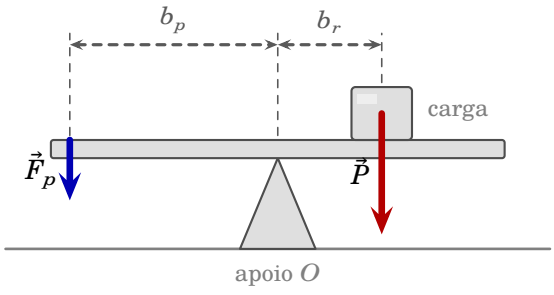
3.8.3 Alavancas

DEFINIÇÃO 3.12 • Alavanca

Uma **alavanca** é uma barra rígida que pode girar em torno de um ponto de apoio, o fulcro. A força que o operador aplica é a *força potente* F_p, com braço b_p; a força que se quer vencer é a *resistência* F_r, com braço b_r. Em equilíbrio, os dois torques em relação ao apoio se igualam.

$$F_p\, b_p = F_r\, b_r \tag{3.12}$$

F_p: força potente, aplicada pelo operador (N)
b_p: braço da força potente, do apoio à linha de ação de F_p (m)
F_r: resistência: peso da carga ou força a vencer (N)
b_r: braço da resistência (m)



$\vec{F}_p$: força potente $\vec{P}$: peso da carga (resistência)
em escala: $b_p = 2\,b_r$, logo $F_p = P/2$; a normal do apoio não está desenhada

Figura 3.17

A Equação (3.12) é a condição de torque nulo com o polo no apoio, onde a normal não produz torque. A razão b_p/b_r diz quantas vezes

a força do operador é multiplicada. As alavancas se classificam pela posição do apoio: **interfixa**, com o apoio entre as duas forças (gangorra, tesoura, pé de cabra, Figura 3.17); **inter-resistente**, com a resistência entre o apoio e a força (carrinho de mão, quebra-nozes); e **interpotente**, com a força entre o apoio e a resistência (pinça, vara de pescar). A lei é a mesma nas três; muda só a geometria.

NOTA

Balança de braços desiguais e gangorra são a mesma física: dois pesos, dois braços, torques iguais. Numa questão de balança adaptada, a leitura da balança é uma das forças e a carga é a outra.

EXEMPLO 3.22 • Alavanca para erguer uma carga

Para erguer uma carga de 1 200 N, um operador usa uma barra rígida de 1,50 m apoiada num calço, de modo que a carga fica pendurada a 0,25 m do apoio e a mão dele atua na outra ponta. Despreze o peso da barra. Qual é a menor força vertical que ele precisa aplicar?

1 Compreender

O assunto é a **lei da alavanca**, uma alavanca interfixa com a carga perto do apoio.

Objetivo. Obter a força potente mínima. O que está em jogo é igualar os torques da força e da carga em relação ao apoio, e para isso identificar os dois braços.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.12) e diga o que cada símbolo significa. O braço da força potente é o comprimento da barra menos o braço da carga.

2 Organizar

Dados $F_r = 1\,200\,\text{N}$
$L = 1{,}50\,\text{m}$
$b_r = 0{,}25\,\text{m}$
peso da barra desprezível.

Conversões nenhuma: comprimentos em metros e força em newtons.

Estratégia calcule $b_p = L - b_r$ e aplique $F_p\, b_p = F_r\, b_r$.

3 Resolver

Braço da força potente. A mão atua na ponta oposta à carga:

$$b_p = 1{,}50 - 0{,}25 = 1{,}25\,\text{m}$$

Lei da alavanca. Iguale os torques em relação ao apoio:

$$F_p \times 1{,}25 = 1\,200 \times 0{,}25$$
$$F_p = \frac{300}{1{,}25}$$

$$\boxed{F_p = 240\,\text{N}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a força saiu cinco vezes menor que a carga, e $b_p/b_r = 1{,}25/0{,}25 = 5$, a mesma razão. O operador paga essa vantagem em deslocamento: para a carga subir 1 cm, a mão dele desce 5 cm, e o trabalho é o mesmo, como o cap. 4 vai mostrar. A força é a "menor" porque, vertical e na ponta, ela tem o maior braço possível; inclinada, ou aplicada mais perto do apoio, precisaria ser maior. **Cuidado com a pegadinha:** usar o comprimento inteiro da barra como braço da força. O braço se mede do apoio, não da carga.

3.9 Aplicação da Segunda Lei: Dinâmica de Partículas

Quando a força resultante sobre uma partícula é não nula, ela acelera. A estratégia é a mesma do equilíbrio (isolar, decompor, aplicar a lei), mas agora usando $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ em vez de $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

> **EXEMPLO 3.23** • Bloco acelerado em piso horizontal liso
>
> Um bloco de $m = 8\,\text{kg}$ está sobre um piso horizontal sem atrito. Uma força horizontal $F = 64\,\text{N}$ é aplicada. Determine a aceleração do bloco.

1 **Compreender**

O assunto é a **Segunda Lei** em um eixo: sem atrito, a força aplicada é a única força horizontal, logo é a própria força resultante.

Objetivo. Obter a aceleração do bloco. O que está em jogo é separar os eixos: na vertical, peso e normal se equilibram e não entram; na horizontal, só a força aplicada.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.5) e diga o que cada símbolo significa. É ela, com $\sum F_x = F$.

2 Organizar

Dados $m = 8\,\text{kg}$
$F = 64\,\text{N}$
atrito nulo.

Conversões nenhuma: newton dividido por kg dá m/s^2.

Estratégia aplique $F = ma$ e divida os dois lados por m.

3 Resolver

Segunda Lei no eixo horizontal. Escreva-a e isole a:

$$F = m \cdot a$$
$$a = \frac{F}{m} = \frac{64}{8}$$

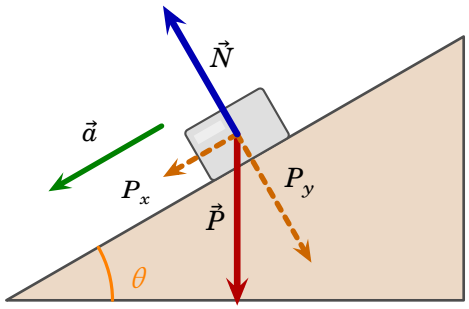
$$a = 8\,\text{m/s}^2$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: dobrar a força dobraria a aceleração, e dobrar a massa a reduziria à metade, como diz a lei. Em um piso real haveria atrito, e parte dos 64 N seria gasta vencendo-o; esse mesmo problema volta com atrito cinético na seção 3.10.

EXEMPLO 3.24 • Bloco descendo plano inclinado sem atrito

Um bloco de $m = 5\,\text{kg}$ é liberado do repouso no topo de um plano inclinado de 30°, sem atrito. Qual a aceleração do bloco? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$ e $\operatorname{sen} 30° = 0{,}5$.



$\vec{N}$: normal — $\vec{P}$: peso — $\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$: componentes de $\vec{P}$
$\vec{a}$: aceleração

forças em escala; a seta de $\vec{a}$ não tem escala

Figura 3.18

1 Compreender

O assunto é a **Segunda Lei em plano inclinado**: com os eixos alinhados ao plano, a normal e P_y se equilibram na direção perpendicular, e na direção paralela só atua P_x.

Objetivo. Obter a aceleração do bloco rampa abaixo. O que está em jogo é ver que P_x é a força resultante e que a massa, presente nos dois lados da equação, não aparece no resultado.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.5) e diga o que cada símbolo significa. No eixo paralelo à rampa, $\sum F_x = P_x = mg\,\text{sen}\,\theta$.

2 Organizar

Dados $m = 5\,\text{kg}$ (não é necessário)
$\theta = 30°$
sem atrito
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\text{sen}\,30° = 0{,}5$.

Conversões nenhuma: g em m/s^2 dá a aceleração em m/s^2.

Estratégia eixo x paralelo à rampa, positivo descendo; escreva $\sum F_x = ma$ com $P_x = mg\,\text{sen}\,\theta$.

3 Resolver

Segunda Lei ao longo da rampa. Escreva-a e simplifique a massa nos dois lados:

$$\begin{aligned} P_x &= ma \\ mg\,\text{sen}\,\theta &= ma \\ a &= g\,\text{sen}\,\theta = 10 \times 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{a = 5\,\text{m/s}^2}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelos casos-limite: $\theta = 0°$ dá $a = 0$ (piso horizontal) e $\theta = 90°$ dá $a = g$ (queda livre); a 30°, metade de g. Perceba que a massa não aparece no resultado: dois blocos de massas diferentes descem a mesma rampa lado a lado, em analogia com o experimento de Galileu sobre a queda dos corpos. Os 5 kg do enunciado não foram usados, e isso é normal.

NOTA

No cap. 2, o movimento uniformemente variado ao longo desta rampa tem $a = g\,\text{sen}\,\theta$ constante: é um MRUV 1D.

EXEMPLO 3.25 • Máquina de Atwood horizontal

Retomando o sistema da seção 3.6: bloco 1 ($m_1 = 3\,\text{kg}$) na mesa horizontal sem atrito, bloco 2 ($m_2 = 5\,\text{kg}$) pendurado por fio ideal sobre polia ideal. Determine a aceleração do sistema e a tração no fio. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto é a **Segunda Lei aplicada a um sistema**: dois DCLs, duas equações, duas incógnitas, a e T.

Objetivo. Obter a aceleração do sistema e a tração no fio. O que está em jogo é usar o vínculo do fio: inextensível, ele impõe a mesma aceleração aos dois blocos, e, com a polia ideal, a mesma tração nas duas pontas.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.4) e diga o que cada símbolo significa. Escrita para cada bloco no sentido do movimento, que a gravidade sobre m_2 define: o bloco 2 desce e o bloco 1 avança. A Definição 3.1 garante o T único.

2 Organizar

Dados $m_1 = 3\,\text{kg}$
$m_2 = 5\,\text{kg}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$P_2 = m_2 g = 50\,\text{N}$
sem atrito.

Conversões nenhuma: massas em kg e g em m/s^2.

Estratégia escreva a Segunda Lei para cada bloco no sentido do movimento (bloco 1: x para a polia; bloco 2: vertical para baixo), some as duas equações para eliminar T e volte a uma delas para achar T.

3 Resolver

Segunda Lei no bloco 1. A tração é a única força horizontal:

$$T = m_1 \cdot a$$

Segunda Lei no bloco 2. O peso a favor e a tração contra:

$$P_2 - T = m_2 \cdot a$$

Aceleração do sistema. Some as duas equações para eliminar T e

isole a:

$$P_2 = (m_1 + m_2)\, a$$
$$a = \frac{P_2}{m_1 + m_2} = \frac{50}{8}$$

$$\boxed{a = 6{,}25\,\text{m/s}^2}$$

Tração. Volte à equação do bloco 1:

$$T = m_1 a = 3 \times 6{,}25$$

$$\boxed{T = 18{,}75\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $a < g$, como deve ser, porque o bloco 2 não está em queda livre, ele arrasta o bloco 1; e $T < P_2$, porque o fio não segura m_2 em repouso, apenas reduz sua queda. Se saísse $T > P_2$, o bloco 2 subiria, o que contraria o enunciado. Uma leitura útil da equação somada: o peso de m_2 é a única força externa que empurra o *sistema*, e ele precisa acelerar a massa total $m_1 + m_2$. No cap. 4, este problema volta pelo Teorema Trabalho-Energia (4.3).

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Durante a aterrissagem de um avião, um passageiro decide determinar a desaceleração da aeronave. Para tal, utiliza um ioiô e observa que, ao mantê-lo suspenso livremente, o barbante faz um ângulo θ com a direção vertical. A aceleração da gravidade no interior do avião é, com boa aproximação, $10\,\text{m/s}^2$. Sabendo que $\operatorname{sen}\theta = 0{,}6$ e $\cos\theta = 0{,}8$, a desaceleração do avião na situação descrita, em km/h·s, considerando a aterrissagem como um movimento retilíneo uniformemente variado, é

(A) 9
(B) 18
(C) 27
(D) 36
(E) 45

YT6PG2

3.10 Forças de Atrito

O **atrito** é uma força que se opõe ao movimento relativo entre duas superfícies em contato, ou à tendência de movimento relativo, quando ainda não há deslizamento. Microscopicamente, tem origem nas irregularidades das superfícies e nas ligações adesivas momentâneas entre elas.

3.10.1 Atrito Estático

DEFINIÇÃO 3.13 • Atrito estático

O **atrito estático** atua entre superfícies que *não* deslizam uma sobre a outra. Seu módulo é *variável*: ajusta-se à força aplicada, valendo exatamente o necessário para impedir o deslizamento, até um valor máximo. Esse máximo é proporcional à força normal, e a constante de proporcionalidade é o **coeficiente de atrito estático**, que depende do par de materiais em contato.

$$0 \leq f_e \leq f_{e,\text{máx}} = \mu_e \cdot N \tag{3.13}$$

f_e: força de atrito estático (N)
$f_{e,\text{máx}}$: atrito estático máximo, na iminência de deslizar (N)
μ_e: coeficiente de atrito estático (adimensional)
N: força normal de contato (N)

3.10.2 Atrito Cinético

DEFINIÇÃO 3.14 • Atrito cinético

O **atrito cinético** (ou dinâmico) atua quando *há* deslizamento entre as superfícies. Diferentemente do estático, seu módulo é praticamente constante enquanto dura o deslizamento, e proporcional à força normal pelo **coeficiente de atrito cinético**.

$$f_c = \mu_c \cdot N \tag{3.14}$$

f_c: força de atrito cinético (N)
μ_c: coeficiente de atrito cinético (adimensional)
N: força normal de contato (N)

3.10.3 Propriedades do Atrito

- Em geral $\mu_e > \mu_c$: é mais difícil iniciar o movimento que mantê-lo;
- **Direção**: paralela à superfície de contato;
- **Sentido**: oposto ao movimento (ou à tendência de movimento);
- **Independe** da área aparente de contato (mesma normal, mesmo material: mesma força);
- **Depende** da natureza das superfícies (traduzida em μ_e e μ_c);
- **Proporcional** à força normal N.

DICA

"Prestes a deslizar" ou "na iminência de movimento" é o sinal para usar $f_e = \mu_e N$. Abaixo disso, o atrito se ajusta; acima, vira cinético.

EXEMPLO 3.26 • Bloco em repouso com atrito: força insuficiente

Um bloco de $m = 10\,\text{kg}$ está em repouso sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito estático com a superfície é $\mu_e = 0{,}4$. Aplica-se uma força horizontal de $F = 20\,\text{N}$. Qual a força de atrito sobre o bloco? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto é o **atrito estático**, que não tem valor fixo: ele vale o que for preciso para segurar o bloco, até o máximo $\mu_e N$.

Objetivo. Obter a força de atrito sobre o bloco. O que está em jogo é não confundir o atrito estático com o seu máximo: o caminho é comparar a força aplicada com $\mu_e N$, e se F for menor o bloco fica parado e o atrito iguala F.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.13) e diga o que cada símbolo significa. A desigualdade é o conteúdo: $\mu_e N$ é um teto, não o valor.

2 Organizar

Dados $m = 10\,\text{kg}$
$\mu_e = 0{,}4$
$F = 20\,\text{N}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
repouso, superfície horizontal.

Conversões nenhuma: massa em kg, g em m/s^2 e força em newtons.

Estratégia calcule $N = mg$ e $f_{e,\text{máx}} = \mu_e N$; compare com F e aplique o equilíbrio horizontal.

3 Resolver

Normal. Superfície horizontal, sem outras forças verticais:

$$N = mg = 10 \times 10 = 100\,\text{N}$$

Atrito estático máximo. É o teto disponível:

$$f_{e,\text{máx}} = \mu_e \cdot N = 0{,}4 \times 100 = 40\,\text{N}$$

Comparação e equilíbrio. $F = 20\,\text{N} < 40\,\text{N}$, então o bloco permanece em repouso, e o atrito equilibra exatamente a força aplicada:

$$F - f_e = 0$$

$$\boxed{f_e = 20\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o atrito tem o sentido oposto ao de F e o mesmo módulo, e o bloco continua parado, como o enunciado diz. Se F subisse para 30 N, o atrito subiria junto, para 30 N; só a partir de 40 N o bloco começaria a deslizar. **Cuidado com a pegadinha:** este é o erro mais frequente em provas de atrito. A força de atrito estático *não* é sempre $\mu_e N$; esse é apenas o valor máximo. Quem responde 40 N inventou uma força que aceleraria o bloco para trás.

> **EXEMPLO 3.27** • Força mínima para iniciar o movimento
>
> Um bloco de $m = 12\,\text{kg}$ repousa sobre uma superfície horizontal com coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0{,}5$. Qual a força horizontal mínima para iniciar o deslizamento? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto é a **iminência de deslizamento**: a força mínima que põe o bloco em movimento é a que iguala o atrito estático máximo.

Objetivo. Obter a força horizontal mínima que inicia o deslizamento. O que está em jogo é ler "mínima para iniciar o movimento" como "igual ao atrito estático máximo", porque até esse valor o atrito consegue segurar o bloco.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.13) e diga o que cada símbolo significa. Aqui vale a igualdade, no limite superior.

2 Organizar

Dados $m = 12\,\text{kg}$
$\mu_e = 0{,}5$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
superfície horizontal.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2 dão a normal em

newtons.

Estratégia calcule $N = mg$ e iguale $F_{\text{mín}}$ a $\mu_e N$.

3 Resolver

Normal. Calcule-a:

$$N = mg = 12 \times 10 = 120\,\text{N}$$

Força mínima. Iguale-a ao atrito estático máximo:

$$F_{\text{mín}} = f_{e,\text{máx}} = \mu_e \cdot N = 0{,}5 \times 120$$

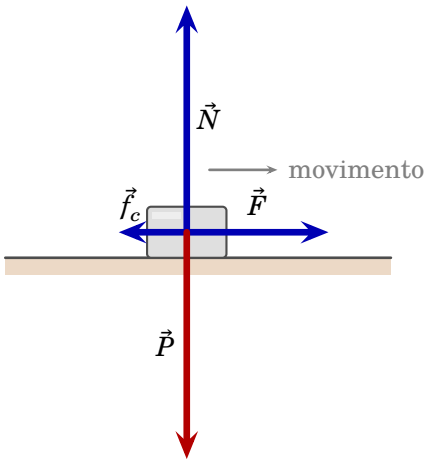
$$\boxed{F_{\text{mín}} = 60\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a força mínima é metade do peso, o que bate com $\mu_e = 0{,}5$. Qualquer força estritamente maior que 60 N inicia o movimento; em exatamente 60 N o bloco fica na iminência, mas ainda em repouso. Uma vez em movimento, o atrito passa a ser cinético ($\mu_c < \mu_e$), e a força necessária para *manter* o deslizamento é menor que 60 N. É por isso que é mais difícil começar a empurrar um armário do que continuar empurrando.

EXEMPLO 3.28 • Bloco deslizando com atrito cinético

Um bloco de $m = 8\,\text{kg}$ desliza em linha reta sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético é $\mu_c = 0{,}3$. Uma força horizontal $F = 50\,\text{N}$ é aplicada no sentido do movimento. Determine a aceleração. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.



$F = 50\,\text{N}$ — $\vec{f}_c$: atrito cinético — $\vec{N}$: normal — $\vec{P}$: peso

Figura 3.19

1 Compreender

O assunto é a **Segunda Lei com atrito cinético**: o bloco está em movimento, então o atrito é cinético, de módulo fixo $\mu_c N$ e sentido contrário ao movimento.

Objetivo. Obter a aceleração do bloco. O que está em jogo é montar a resultante horizontal com o sinal certo: F a favor e f_c contra, e a diferença é o que acelera.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.14) e diga o que cada símbolo significa. O atrito entra na Equação (3.5) como força contrária.

2 Organizar

Dados $m = 8\,\text{kg}$
$\mu_c = 0{,}3$
$F = 50\,\text{N}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia calcule $N = mg$ e $f_c = \mu_c N$; escreva $F - f_c = ma$ e isole a.

3 **Resolver**

Normal e atrito cinético. Calcule os dois:

$$N = mg = 8 \times 10 = 80\,\text{N}$$
$$f_c = \mu_c \cdot N = 0{,}3 \times 80 = 24\,\text{N}$$

Segunda Lei na horizontal. No sentido do movimento, isole a:

$$F - f_c = ma$$
$$a = \frac{F - f_c}{m} = \frac{50 - 24}{8} = \frac{26}{8}$$

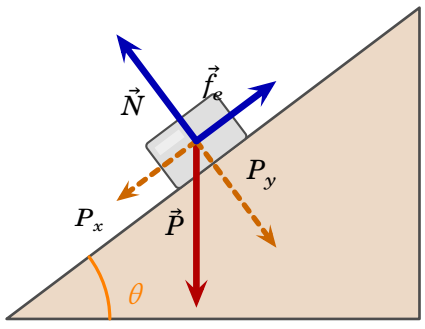
$$a = 3{,}25\,\text{m/s}^2$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: sem atrito, a aceleração seria $50/8 = 6{,}25\,\text{m/s}^2$; o atrito a reduz a pouco mais da metade, o que é razoável para $\mu_c = 0{,}3$. Se F fosse menor que 24 N, o bloco em movimento frearia, e ao parar o atrito passaria a estático. No cap. 4, o atrito cinético aparece como a principal força *não conservativa* do repertório: ele dissipa energia mecânica na forma de calor.

EXEMPLO 3.29 • Bloco em plano inclinado: equilíbrio limite com atrito

Um bloco de $m = 6\,\text{kg}$ é depositado sobre um plano inclinado a 37° com a horizontal. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é $\mu_e = 0{,}75$. O bloco permanece em repouso? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$, $\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$, $\cos 37° = 0{,}8$.



$\vec{f}_e$: atrito estático — $\vec{N}$: normal — $P = 60\,\text{N}$
$\vec{P}_x$, $\vec{P}_y$: componentes de $\vec{P}$ $\theta = 37°$

Figura 3.20

1 **Compreender**

O assunto é o **atrito estático em plano inclinado**: a componente do peso ao longo da rampa, P_x, tenta puxar o bloco para baixo, e o atrito estático, rampa acima, tenta segurá-lo, até o máximo $\mu_e N$.

Objetivo. Decidir se o bloco permanece em repouso sobre a rampa. O que está em jogo é comparar P_x com $f_{e,\text{máx}}$, lembrando que a normal na rampa é $mg\cos\theta$, não mg: se P_x for menor, o bloco fica parado; se for igual, fica na iminência de deslizar; se for maior, desliza.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.13) e diga o que cada símbolo significa. A normal que entra nela é a do plano inclinado, igual a P_y.

2 **Organizar**

Dados $m = 6\,\text{kg}$
$\theta = 37°$
$\mu_e = 0{,}75$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$
$\cos 37° = 0{,}8$.

Conversões nenhuma: massa em kg e g em m/s^2.

Estratégia decomponha o peso; a normal equilibra P_y; calcule $f_{e,\text{máx}} = \mu_e N$ e compare com P_x.

3 **Resolver**

Peso e componentes. Calcule o peso e decomponha-o nos eixos do plano:

$$P = mg = 6 \times 10 = 60\,\text{N}$$
$$P_x = P\operatorname{sen}\theta = 60 \times 0{,}6 = 36\,\text{N}$$
$$P_y = P\cos\theta = 60 \times 0{,}8 = 48\,\text{N}$$

Normal. Pelo equilíbrio perpendicular ao plano:

$$N = P_y = 48\,\text{N}$$

Atrito estático máximo. É o teto disponível:

$$f_{e,\text{máx}} = \mu_e \cdot N = 0{,}75 \times 48 = 36\,\text{N}$$

Comparação. Com a componente que puxa o bloco rampa abaixo: $P_x = 36\,\text{N} = f_{e,\text{máx}}$.

O bloco permanece em repouso, mas na iminência de deslizar: qualquer pequena perturbação o colocará em movimento.

4 Avaliar

Avalie a coerência pela razão entre as componentes: o coeficiente de atrito mínimo para segurar um bloco em uma rampa é $\mu_{\text{min}} = P_x/P_y = \tan\theta = 0{,}6/0{,}8 = 0{,}75$, exatamente o μ_e dado; por isso o caso é o limite. Na prática, vibração ou uma rajada de vento bastam para iniciar o deslizamento, e por isso projetos reais trabalham com μ_e bem maior que $\tan\theta$, com margem de segurança. **Cuidado com a pegadinha:** a normal em plano inclinado é $mg\cos\theta$, não mg. Quem usa $N = 60\,\text{N}$ acha $f_{e,\text{máx}} = 45\,\text{N}$ e conclui, errado, que há folga.

NOTA

Considerações práticas sobre μ em problemas de prova:

- μ é sempre adimensional, em geral entre 0 e 1,5;
- Para aço-aço seco, $\mu_e \approx 0{,}7$ e $\mu_c \approx 0{,}6$;
- Para aço-gelo, μ_c cai a cerca de 0,03;
- A presença de lubrificantes reduz μ_c em uma ou duas ordens de grandeza, princípio básico da lubrificação de máquinas.

NOTA

Para um mesmo material, $\tan\theta_{\text{max}} = \mu_e$ define o *ângulo de repouso* da rampa. Acima desse ângulo, nenhum bloco se sustenta sem auxílio externo.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2011

Um corpo de massa 1,0 kg inicia seu movimento com velocidade 2,0 m/s, deslizando sobre uma superfície cujo coeficiente de atrito cinético é 0,1. Após deslocar-se em linha reta de uma distância x, sua velocidade diminui para 1,0 m/s. Quanto à distância x percorrida, está correto afirmar que é igual a

Dado: $g = 10\,\text{m/s}^2$.

(A) 0,5 m
(B) 1,0 m
(C) 1,5 m
(D) 2,0 m
(E) 2,5 m

Q9FBTZ

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — BR Distribuidora, Operação, 2012
Em uma determinada indústria, caixas cúbicas são transportadas sobre uma esteira horizontal. Essas caixas partem do repouso, são aceleradas uniformemente e atingem velocidade de 1,0 m/s em 0,20 s.
O valor do coeficiente de atrito estático mínimo entre a esteira e as caixas, de forma que não haja movimento das caixas em relação à esteira é, aproximadamente,
Dado: $g = 10\,\text{m/s}^2$

(A) 0,10
(B) 0,20
(C) 0,30
(D) 0,40
(E) 0,50

FWNM3G

3.11 Dinâmica do Movimento Circular

No movimento circular uniforme (MCU), embora o módulo da velocidade permaneça constante, a *direção* da velocidade muda continuamente. Há, portanto, aceleração. Pela 2ª Lei, deve haver também uma força resultante. Essa força, no caso do MCU, aponta sempre para o centro da trajetória, daí o nome **força centrípeta**.

3.11.1 Aceleração Centrípeta

DEFINIÇÃO 3.15 • Aceleração centrípeta

Em um movimento circular, a **aceleração centrípeta** é a aceleração responsável por mudar a direção da velocidade. Tem direção radial e sentido voltado para o centro da trajetória, e cresce com o quadrado da velocidade e com o inverso do raio.

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \tag{3.15}$$

a_c: aceleração centrípeta (m/s^2)
v: módulo da velocidade linear (m/s)
R: raio da trajetória (m)
$\omega = v/R$: velocidade angular (rad/s)

3.11.2 Força Centrípeta

DEFINIÇÃO 3.16 • Força centrípeta

A **força centrípeta** é a componente radial da força resultante, responsável por manter a partícula em trajetória circular. Sempre aponta para o centro da trajetória.

$$F_c = m \cdot a_c = \frac{mv^2}{R} \tag{3.16}$$

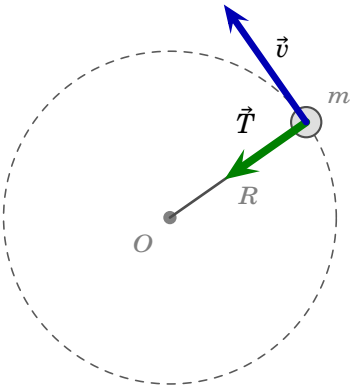
F_c: força centrípeta (N)
m: massa da partícula (kg)
v: módulo da velocidade linear (m/s)
R: raio da trajetória (m)

ATENÇÃO

"Força centrípeta" não é um novo tipo físico de força, análogo a "tração", "peso" ou "atrito". É apenas o *nome* dado à componente radial da força resultante, que, dependendo da situação física, pode ser tração (corda), normal (pista inclinada), atrito (curva horizontal), peso (satélite), ou uma combinação dessas. Pergunte sempre: "qual força real está desempenhando o papel de centrípeta aqui?".

EXEMPLO 3.30 • Objeto em MCU por fio

Um objeto de $m = 2\,\text{kg}$ descreve círculos horizontais de raio $R = 3\,\text{m}$ com velocidade constante $v = 6\,\text{m/s}$, preso a um fio ideal. Qual a força centrípeta e qual o agente físico que a fornece?



$\vec{T}$: tração, centrípeta — $v = 6\,\text{m/s}$ $R = 3\,\text{m}$

setas de grandezas diferentes, sem escala entre si

Figura 3.21

1 Compreender

O assunto é a **força centrípeta** e, sobretudo, a pergunta "quem faz o papel dela?".

Objetivo. Obter a força centrípeta e identificar a força real que a fornece. O que está em jogo é entender que centrípeta é papel, não tipo de força: em MCU existe aceleração para o centro, logo existe resultante para o centro, e alguma força real tem de ser ela.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.16) e diga o que cada símbolo significa. Neste caso a única força horizontal sobre o objeto é a tração do fio, então é a tração quem desempenha o papel.

2 Organizar

Dados $m = 2\,\text{kg}$
$v = 6\,\text{m/s}$
$R = 3\,\text{m}$
trajetória horizontal.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia aplique $F_c = mv^2/R$ e identifique a força real que aponta para o centro.

3 Resolver

Força centrípeta necessária. Calcule-a:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{2 \times 6^2}{3} = \frac{72}{3}$$

$$\boxed{F_c = 24\,\text{N}}$$

Agente. A única força horizontal sobre o objeto é a tração do fio, dirigida para o centro.

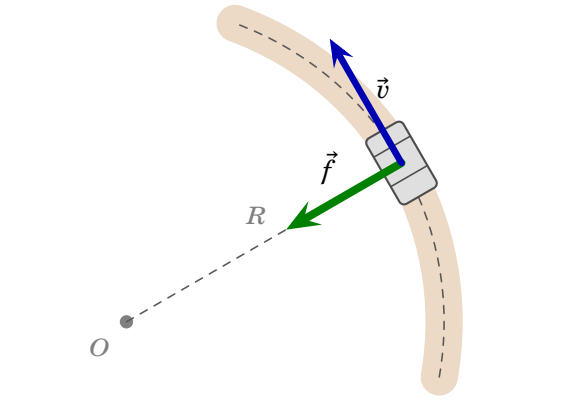
A tração no fio faz o papel de força centrípeta: $T = F_c = 24\,\text{N}$.

4 Avaliar

Avalie a coerência: dobrar a velocidade quadruplicaria a tração, o que explica por que fios se rompem em rotações rápidas. Se a tração ultrapassar a resistência do fio, ele se rompe e o objeto passa a descrever uma linha reta tangente à trajetória (1ª Lei), não "voando para fora". A "força centrífuga" é, nesse contexto, uma pseudoforça: só aparece em referenciais que giram com o objeto.

EXEMPLO 3.31 • Carro em curva horizontal com atrito

Um carro de $m = 1\,200\,\text{kg}$ faz uma curva horizontal plana de raio $R = 80\,\text{m}$ a velocidade constante $v = 20\,\text{m/s}$ (72 km/h). O atrito entre os pneus e o asfalto é a única força que fornece a centrípeta. Qual o coeficiente de atrito mínimo necessário? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.



$\vec{f}$: atrito, centrípeta $v = 20\,\text{m/s}$ $R = 80\,\text{m}$

setas sem escala entre si

Figura 3.22

1 Compreender

O assunto é a **força centrípeta** fornecida pelo **atrito estático**: em uma curva plana, o que puxa o carro para o centro é o atrito dos pneus com o asfalto, estático porque o pneu não desliza lateralmente.

Objetivo. Obter o menor coeficiente de atrito que ainda segura o carro na curva. O que está em jogo é igualar, no limite, o atrito máximo disponível, μN, à centrípeta necessária: acima disso o carro derrapa.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.16) e diga o que cada símbolo significa. A normal que entra em μN vem do equilíbrio vertical, $N = mg$.

2 Organizar

Dados $m = 1\,200\,\text{kg}$
$R = 80\,\text{m}$
$v = 20\,\text{m/s}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
pista horizontal.

Conversões nenhuma: a velocidade já vem em m/s.

Estratégia na vertical, $N = mg$; calcule $F_c = mv^2/R$ e imponha, no limite, $\mu N = F_c$.

3 Resolver

Normal. Pelo equilíbrio vertical:

$$N = mg = 1\,200 \times 10 = 12\,000\,\text{N}$$

Força centrípeta necessária. Calcule-a:

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = \frac{1\,200 \times 400}{80} = 6\,000\,\text{N}$$

Coeficiente mínimo. No limite, o atrito máximo iguala a centrípeta; isole μ:

$$\mu \cdot N = F_c$$
$$\mu = \frac{F_c}{N} = \frac{6\,000}{12\,000}$$

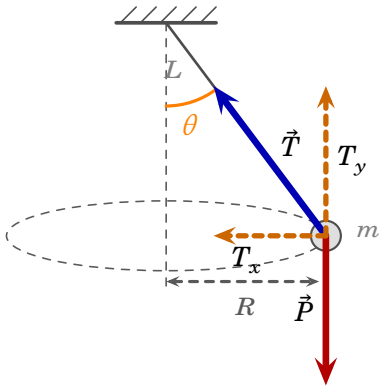
$$\mu_{\text{min}} = 0{,}5$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $\mu = 0{,}5$ é compatível com asfalto seco em boas condições (μ_e entre 0,7 e 0,9), mas não com asfalto molhado (μ pode cair a 0,3) nem com piso oleoso ($\mu \approx 0{,}1$). É por isso que placas pedem redução de velocidade em tempo chuvoso. Perceba que a massa não aparece no resultado: $\mu_{\text{min}} = v^2/(gR)$, então um carro vazio ou carregado derrapa na mesma velocidade crítica.

EXEMPLO 3.32 • Pêndulo cônico

Uma massa de $m = 0{,}5\,\text{kg}$ presa a um fio de comprimento $L = 1\,\text{m}$ descreve uma trajetória circular horizontal enquanto o fio forma um ângulo de $37°$ com a vertical (pêndulo cônico). Determine a tração no fio e a velocidade da massa. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$, $\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$, $\cos 37° = 0{,}8$.



$\vec{T}$: tração — $P = 5\,\text{N}$ — $\vec{T}_x$, $\vec{T}_y$: componentes de $\vec{T}$ — $\theta = 37°$

Figura 3.23

1 Compreender

O assunto é o **pêndulo cônico**: duas forças agem na massa, o peso e a tração inclinada.

Objetivo. Obter a tração no fio e a velocidade da massa. O que está em jogo é ver que o raio do círculo não é L, é $L\operatorname{sen}\theta$, e que a tração se divide em dois papéis: a componente vertical equilibra o peso e a horizontal faz o papel de centrípeta.

Antes de seguir, escreva a Equação (3.16) e diga o que cada símbolo significa. A componente horizontal da tração é a força que entra nela; a vertical obedece ao equilíbrio, porque a massa não sobe nem desce.

2 Organizar

Dados $m = 0{,}5\,\text{kg}$
$L = 1\,\text{m}$
$\theta = 37°$ com a vertical
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\operatorname{sen} 37° = 0{,}6$
$\cos 37° = 0{,}8$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia calcule $R = L\operatorname{sen}\theta$; imponha $T\cos\theta = mg$ na vertical e $T\operatorname{sen}\theta = mv^2/R$ na horizontal.

3 **Resolver**

Raio da trajetória. Calcule-o:

$$R = L\,\mathrm{sen}\,\theta = 1 \times 0{,}6 = 0{,}6\,\mathrm{m}$$

Equilíbrio na vertical. Isole T:

$$T\cos\theta = mg$$
$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{0{,}5 \times 10}{0{,}8}$$

$$\boxed{T = 6{,}25\,\mathrm{N}}$$

Centrípeta na horizontal. Iguale a componente horizontal da tração à força centrípeta e isole v^2:

$$T\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{mv^2}{R}$$
$$v^2 = \frac{T\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot R}{m} = \frac{6{,}25 \times 0{,}6 \times 0{,}6}{0{,}5} = 4{,}5\,\mathrm{m^2/s^2}$$

Velocidade. Extraia a raiz:

$$\boxed{v = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}1\,\mathrm{m/s}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: $T > P = 5\,\mathrm{N}$, como deve ser, porque a tração sustenta o peso e ainda sobra componente para a centrípeta; e $v \approx 2\,\mathrm{m/s}$ é uma velocidade modesta para um raio de 0,6 m. O mesmo princípio, rotação com componente radial de força, aparece em *loopings*, em satélites e, na indústria, em centrífugas de separação, onde a centrípeta vem da força normal das paredes do rotor. **Cuidado com a pegadinha:** usar $R = L$ em vez de $R = L\,\mathrm{sen}\,\theta$ é o erro clássico do pêndulo cônico; a massa gira em torno do eixo vertical, não do ponto de fixação.

CAPÍTULO

4

Energia e Trabalho

É importante perceber que, na física de hoje, não sabemos o que a energia é.

RICHARD FEYNMAN

É raro um físico começar uma aula confessando que não sabe do que vai falar. Feynman fez isso em 1963, na aula sobre a conservação da energia do primeiro volume das *Lições de Física* (*The Feynman Lectures on Physics*), o curso introdutório que ele deu no Caltech entre 1961 e 1963 e que os colegas Leighton e Sands transcreveram em livro. A confissão é exata, e diz o que este capítulo faz: a Física não sabe o que a energia é, mas sabe contá-la. Ela aparece em várias formas, passa de uma para outra e o total não muda. É essa contabilidade que fecha, e não o conhecimento das forças em cada instante, que torna os métodos energéticos tão mais curtos que os da Dinâmica.

O conceito de **energia** é um dos mais fundamentais e poderosos de toda a Física. As Leis de Newton (cap. 3) exigem conhecer todas as forças e acelerações em cada instante da trajetória. Os **métodos energéticos** fazem outro caminho: relacionam diretamente o estado inicial e o estado final de um sistema, sem perguntar o que aconteceu entre um e outro. Por isso resolvem em duas linhas problemas que a Dinâmica resolveria em dez, e resolvem também aqueles em que a trajetória é curva ou a força não é uniforme.

Na indústria de petróleo e gás, a energia é o conceito central de toda a cadeia produtiva. Bombas e compressores transferem energia mecânica para fluidos; turbinas e geradores convertem energia

cinética em energia elétrica; guindastes de plataforma erguem cargas contra o peso; e o rendimento de cada equipamento determina o consumo de combustível e o custo operacional de uma refinaria. A banca Cesgranrio cobra este capítulo com forte ênfase em conservação da energia mecânica, trabalho da força peso e potência de máquinas reais.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Calcular o trabalho de uma força constante e interpretar seu sinal;
- Reconhecer quando uma força realiza trabalho motor, resistente ou nulo;
- Aplicar o Teorema Trabalho-Energia para encontrar velocidades;
- Distinguir forças conservativas de forças dissipativas;
- Calcular energia potencial gravitacional e elástica;
- Aplicar a Conservação da Energia Mecânica em sistemas sem atrito;
- Tratar sistemas com dissipação por meio do trabalho das forças não conservativas;
- Calcular potência média, potência instantânea e rendimento de máquinas.

4.1 Trabalho de uma Força

O **trabalho** é a grandeza que mede a **transferência de energia** feita por uma força. Quando uma força age sobre um corpo que se desloca, ela pode entregar energia a esse corpo, retirar energia dele ou não trocar energia nenhuma. Quem decide entre os três casos é a direção da força em relação ao deslocamento: apenas a componente da força *na direção do deslocamento* realiza trabalho.

4.1.1 Definição

DEFINIÇÃO 4.1 • Trabalho de uma Força Constante

O **trabalho** de uma força constante sobre um corpo é a medida da energia que essa força transfere ao corpo durante um deslocamento. É uma grandeza escalar: tem sinal, mas não tem direção nem sentido.

$$W = F\,d\cos\theta \tag{4.1}$$

W: trabalho da força (J = N · m)
F: módulo da força (N)
d: módulo do deslocamento (m)
θ: ângulo entre a força e o deslocamento

DICA

A unidade de trabalho e de energia no SI é o joule (J). Um joule é o trabalho de uma força de 1 N ao longo de 1 m, na direção do movimento.

4.1.2 Sinal do Trabalho

Perceba que F e d são módulos, portanto positivos. Quem dá o sinal do trabalho é $\cos\theta$, e é o sinal que diz se a força entrega ou retira energia do corpo:

Ângulo	$\cos\theta$	Trabalho	Significado
$0° \le \theta < 90°$	> 0	positivo	motor: a força entrega energia ao corpo
$\theta = 90°$	$= 0$	nulo	a força não troca energia com o corpo
$90° < \theta \le 180°$	< 0	negativo	resistente: a força retira energia do corpo

NOTA

Três casos aparecem em quase toda prova. Guarde os três:

- $\theta = 0°$: $W = F\,d$, o maior trabalho positivo possível para aquela força;
- $\theta = 90°$: $W = 0$, caso da força normal e da força centrípeta;
- $\theta = 180°$: $W = -F\,d$, caso do atrito e do arraste.

4.1.3 Trabalho da Força Resultante

Quando várias forças atuam sobre o mesmo corpo, o trabalho total é a soma algébrica dos trabalhos de cada uma, com os respectivos sinais:

$$W_{\text{total}} = W_1 + W_2 + \cdots = \sum_i W_i$$

Você pode também somar primeiro as forças, obtendo $\vec{F}_R$, e depois calcular $W_{\text{total}} = F_R\,d\cos\theta_R$. Os dois caminhos dão o mesmo número; escolha o que der menos conta.

EXEMPLO 4.1 • Trabalho de força horizontal

Um bloco é empurrado por uma força horizontal de 200 N ao longo de 5 m sobre um piso plano. Calcule o trabalho realizado por essa força.

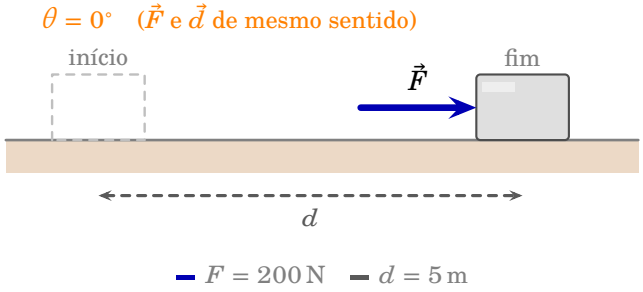


Figura 4.1

1 Compreender

O assunto é o **trabalho de uma força constante**, a energia que a força entrega ao bloco ao longo do deslocamento.

Objetivo. Obter o trabalho da força nos 5 m de deslocamento. O que está em jogo é o ângulo: a força é horizontal e o bloco anda na horizontal, no mesmo sentido, então força e deslocamento são paralelos e $\theta = 0°$.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.1) e diga o que cada símbolo significa. Com $\cos 0° = 1$, ela se reduz ao produto da força pelo deslocamento.

2 Organizar

Dados $F = 200\,\text{N}$
$d = 5\,\text{m}$
$\theta = 0°$.

Conversões nenhuma: newton vezes metro dá joule.

Estratégia aplique $W = F\,d\cos\theta$ com $\cos 0° = 1$.

3 Resolver

Trabalho. Substitua os valores na definição:

$$\begin{aligned} W &= F\,d\cos\theta \\ &= 200 \times 5 \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{W = 1\,000\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o resultado é positivo, como tem de ser, porque a força favorece o movimento. Um quilojoule é a ordem de grandeza esperada para empurrar um objeto pesado por poucos metros. Perceba que a massa do bloco não foi usada nem é necessária: o trabalho depende da força, do deslocamento e do ângulo, não da massa. Em esteiras transportadoras de refinaria, é exatamente esse trabalho motor por metro percorrido que o motor elétrico precisa fornecer.

EXEMPLO 4.2 • Trabalho de força inclinada

Uma corda faz ângulo de 60° com a horizontal ao puxar uma caixa com força de 150 N. Se a caixa se desloca 4 m horizontalmente, qual é o trabalho realizado por essa força?

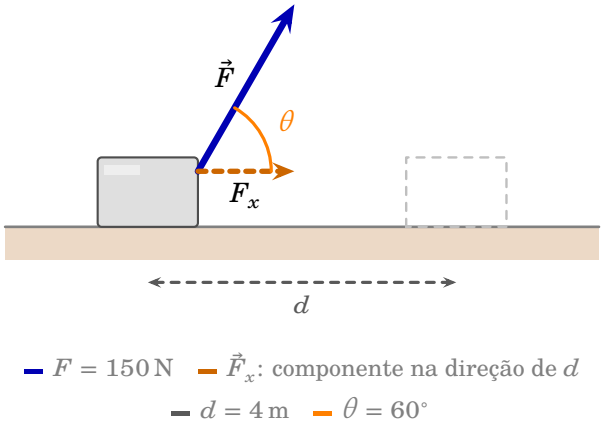


Figura 4.2

1 Compreender

O assunto é o **ângulo entre força e deslocamento**: a corda puxa para cima e para a frente, mas a caixa só anda para a frente.

Objetivo. Obter o trabalho da força da corda nos 4 m. O que está em jogo é ver que só a componente horizontal da força, $F\cos 60°$, acompanha o deslocamento e transfere energia; a componente vertical é perpendicular ao movimento e não realiza trabalho.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.1) e diga o que cada símbolo significa. O cosseno que está nela já faz essa projeção.

2 Organizar

Dados
$F = 150\,\text{N}$
$d = 4\,\text{m}$
$\theta = 60°$
$\cos 60° = 0{,}5.$

Conversões nenhuma: força em newtons e deslocamento em metros.

Estratégia aplique $W = F\,d\cos\theta$ sem decompor nada à mão. O cosseno na fórmula já faz a projeção.

3 Resolver

Trabalho. Substitua os valores, com $\cos 60° = 0{,}5$:

$$\begin{aligned} W &= F\,d\cos\theta \\ &= 150 \times 4 \times 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{W = 300\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: se a corda fosse horizontal, o trabalho seria $150 \times 4 = 600\,\text{J}$. Com $60°$ de inclinação, saiu a metade, que é justamente $\cos 60° = 0{,}5$. Quanto mais inclinada a corda, menos da força se aproveita no deslocamento. Em içamentos com polia desviada, esse efeito do ângulo é o que obriga a dimensionar cabo e motor acima do que o peso sozinho pediria.

EXEMPLO 4.3 • Trabalho da força peso

Um corpo de 5 kg cai verticalmente 8 m a partir do repouso. Calcule o trabalho realizado pela força peso. ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

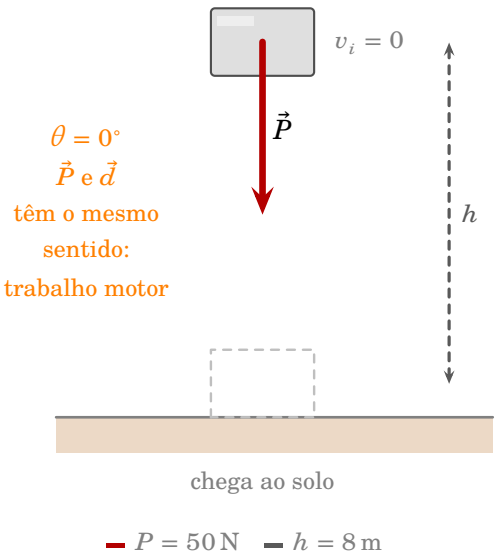


Figura 4.3

NOTA

Trabalho nulo não significa força nula. A força normal do piso sobre um corpo em movimento horizontal tem $\theta = 90°$: ela existe, sustenta o corpo, e ainda assim realiza $W = 0$.

1 Compreender

O assunto é o **trabalho da força peso** numa queda.

Objetivo. Obter o trabalho que o peso realiza nos 8 m de queda. O que está em jogo é o sinal: o peso aponta para baixo e o corpo desce, então força e deslocamento têm o mesmo sentido, $\theta = 0°$, e o trabalho é motor.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.1) e diga o que cada símbolo significa. Antes de usá-la você precisa do módulo do peso, que vem da Equação (3.7), do cap. 3.

2 Organizar

Dados $m = 5\,\text{kg}$
$h = 8\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\theta = 0°$.

Conversões nenhuma: massa em kg, g em m/s^2 e altura em metros dão joule.

Estratégia calcule $P = mg$ e leve esse valor a $W = P\,h\cos 0°$.

3 Resolver

Peso. Calcule primeiro o seu módulo:

$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 5 \times 10 = 50\,\text{N} \end{aligned}$$

Trabalho do peso. Aplique a definição, com $\cos 0° = 1$:

$$\begin{aligned} W_P &= P\,h\cos 0° \\ &= 50 \times 8 \times 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{W_P = 400\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o sinal positivo confere, porque o corpo desce e o peso puxa para baixo. Perceba que $W_P = mgh$, produto que você vai reencontrar na Seção 4.4 com outro nome, energia potencial gravitacional. Se em vez de cair o corpo estivesse sendo içado, o mesmo cálculo daria $-400\,\text{J}$: o peso passaria a ser trabalho resistente, e seria essa a energia que o motor do guincho teria de vencer.

NOTA

O trabalho do peso depende apenas da diferença de altura, nunca do caminho percorrido. É essa propriedade que faz do peso uma força conservativa (Seção 4.3).

EXEMPLO 4.4 • Trabalho da força de atrito

Um bloco desliza 6 m sobre uma superfície horizontal sob ação de uma força de atrito cinético de módulo 40 N. Calcule o trabalho realizado pela força de atrito.

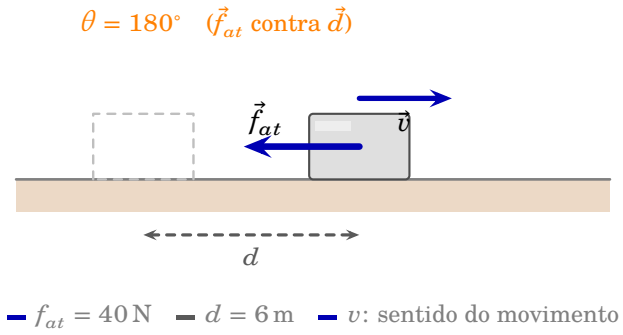


Figura 4.4

1 Compreender

O assunto é o **sinal do trabalho** de uma força resistente.

Objetivo. Obter o trabalho da força de atrito nos 6 m. O que está em jogo é manter o sinal: o atrito cinético sempre se opõe ao movimento, então o ângulo entre ele e o deslocamento é $\theta = 180°$ e o trabalho sai negativo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.1) e diga o que cada símbolo significa. O $\cos 180° = -1$ é o que diz que o atrito retira energia do bloco.

2 Organizar

Dados $f_{at} = 40\,\text{N}$
$d = 6\,\text{m}$
$\theta = 180°$
$\cos 180° = -1$.

Conversões nenhuma: newton vezes metro dá joule.

Estratégia aplique $W = F\,d\cos\theta$ com o cosseno negativo, sem suprimir o sinal.

3 Resolver

Trabalho do atrito. Substitua os valores, mantendo $\cos 180° = -1$:

$$\begin{aligned} W_{at} &= f_{at}\,d\cos 180° \\ &= 40 \times 6 \times (-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{W_{at} = -240\,\text{J}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o sinal negativo diz que o atrito retirou 240 J do bloco. Essa energia não desapareceu, ela virou calor nas superfícies em contato, que é justamente por que peça atritada esquenta. Em equipamentos rotativos de refinaria, essa parcela dissipada é perda operacional paga em combustível, e é o que a lubrificação existe para reduzir. **Cuidado com a pegadinha:** o trabalho do atrito é sempre negativo. Escrever $W_{at} = fd$ sem o sinal é o erro conceitual mais cobrado desta seção.

4.2 Energia Cinética e Teorema Trabalho-Energia

A **energia cinética** é a energia que um corpo tem por estar em movimento. Ela cresce com a massa e cresce muito mais depressa com a velocidade, e é essa assimetria que explica boa parte das normas de segurança que você conhece.

DEFINIÇÃO 4.2 • Energia Cinética

A **energia cinética** de um corpo é a energia associada ao seu movimento. É uma grandeza escalar, nunca negativa, e vale zero apenas quando o corpo está em repouso.

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \tag{4.2}$$

E_c: energia cinética (J)
m: massa do corpo (kg)
v: módulo da velocidade (m/s)

NOTA

A velocidade entra ao quadrado, e isso tem consequência prática direta:

- Dobrar a velocidade **quadruplica** a energia cinética;
- Triplicar a velocidade multiplica a energia cinética por **9**.

É por isso que a distância de frenagem cresce muito mais rápido do que a velocidade, tanto no trânsito quanto em pátios industriais e sistemas de parada de emergência.

O Teorema Trabalho-Energia liga as duas grandezas do capítulo

até aqui, trabalho e energia cinética, numa única igualdade.

DEFINIÇÃO 4.3 • Teorema Trabalho-Energia

O trabalho da **força resultante** sobre um corpo é igual à variação da energia cinética desse corpo. Toda a energia que a resultante entrega ao corpo aparece como aumento de velocidade, e toda a energia que ela retira aparece como diminuição.

$$W_{\text{res}} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \tag{4.3}$$

W_{res}: trabalho da força resultante (J)
ΔE_c: variação da energia cinética (J)
v_i: velocidade inicial (m/s)
v_f: velocidade final (m/s)

DICA

Este teorema dispensa calcular aceleração e usar equações horárias. Se a questão dá força e distância e pede velocidade, ou dá velocidade e pede distância, comece por ele.

EXEMPLO 4.5 • Aplicação do Teorema Trabalho-Energia

Um bloco de 4 kg parte do repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito e é submetido a uma força horizontal constante de 20 N por uma distância de 10 m. Determine a velocidade final do bloco.

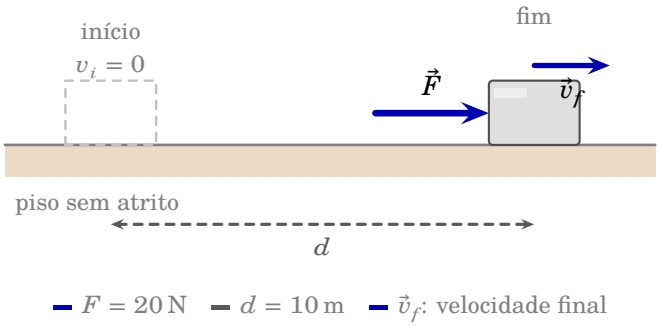


Figura 4.5

1 Compreender

O assunto é o **Teorema Trabalho-Energia**, na sua aplicação mais direta.

Objetivo. Obter a velocidade do bloco ao fim dos 10 m. O que está em jogo é reconhecer que, sem atrito e com a força horizontal, ela é a própria força resultante, e que o bloco parte do repouso: a energia cinética inicial é zero e toda a energia entregue aparece na velocidade final.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.3) e diga o que cada símbolo significa. O trabalho da resultante vem da Equação (4.1), com $\theta = 0°$.

2 **Organizar**

Dados $m = 4\,\text{kg}$
$v_i = 0$
$F = 20\,\text{N}$
$d = 10\,\text{m}$
sem atrito.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia calcule $W_{\text{res}} = F\,d$ e iguale à energia cinética final, $^1/_2 m v_f^2$.

3 **Resolver**

Trabalho da resultante. Calcule-o:

$$\begin{aligned} W_{\text{res}} &= F\,d \\ &= 20 \times 10 = 200\,\text{J} \end{aligned}$$

Teorema Trabalho-Energia. Iguale esse trabalho à variação da energia cinética e isole v_f:

$$\begin{aligned} W_{\text{res}} &= \frac{1}{2} m v_f^2 - 0 \\ 200 &= \frac{1}{2} \times 4 \times v_f^2 \\ v_f^2 &= 100 \end{aligned}$$

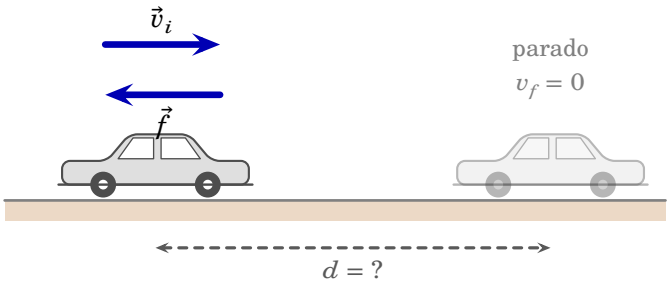
$$\boxed{v_f = 10\,\text{m/s}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: pela Cinemática, $a = F/m = 5\,\text{m/s}^2$ e $v_f^2 = v_i^2 + 2ad = 2 \times 5 \times 10 = 100$, o mesmo resultado. Os dois caminhos concordam, como têm de concordar. O teorema é mais curto porque elimina a aceleração, um número que a questão não pediu e você não precisava conhecer.

EXEMPLO 4.6 • Frenagem por atrito

Um carro de 1 200 kg trafega a 20 m/s quando o motorista aciona os freios. A força de frenagem total é de 6 000 N. Qual a distância percorrida até parar?



$v_i = 20\,\text{m/s}$ $f = 6\,000\,\text{N}$ d: distância de frenagem

$\vec{f}$ desenhada acima do carro só para leitura: age no contato pneu-pista

Figura 4.6

1 Compreender

O assunto é o **Teorema Trabalho-Energia** no sentido inverso do exemplo anterior: aqui a força retira energia.

Objetivo. Obter a distância que o carro percorre até parar. O que está em jogo é ver que a frenagem se opõe ao movimento, $\theta = 180°$, e realiza trabalho negativo até consumir toda a energia cinética que o carro tinha.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.3) e diga o que cada símbolo significa. Com $v_f = 0$, o lado direito é a energia cinética inicial com o sinal trocado.

2 Organizar

Dados $m = 1\,200\,\text{kg}$
$v_i = 20\,\text{m/s}$
$v_f = 0$
$f = 6\,000\,\text{N}$.

Conversões nenhuma: a velocidade já vem em m/s.

Estratégia calcule a energia cinética inicial, iguale-a em módulo ao trabalho da frenagem, $-fd$, e isole d.

3 Resolver

Energia cinética inicial. Calcule-a:

$$\begin{aligned} E_{c,i} &= \frac{1}{2}mv_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 1\,200 \times 400 = 240\,000\,\text{J} \end{aligned}$$

Teorema Trabalho-Energia na frenagem. Escreva-o para o trecho de frenagem:

$$\begin{aligned} W_{\text{res}} &= E_{c,f} - E_{c,i} = 0 - 240\,000 = -240\,000\,\text{J} \\ -fd &= -240\,000 \\ d &= \frac{240\,000}{6\,000} \end{aligned}$$

$$\boxed{d = 40\,\text{m}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 40 m para parar um carro a 72 km/h é uma distância plausível, da ordem de dez carros enfileirados. Agora perceba o efeito do quadrado: a 40 m/s a energia cinética seria quatro vezes maior e a distância de frenagem passaria a 160 m. É essa relação quadrática, e não a intuição linear, que justifica os limites de velocidade em pátios de refinaria e em plataformas.

> **EXEMPLO 4.7** • Resultante com atrito e velocidade final
>
> Um bloco de 5 kg é puxado horizontalmente sobre uma superfície com atrito por uma força constante de 35 N, partindo do repouso. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é 0,2. Qual é a velocidade do bloco após percorrer 10 m? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

1 Compreender

O assunto é o **Teorema Trabalho-Energia** com **atrito**: duas forças horizontais agem no bloco, a força aplicada, que é motora, e o atrito cinético, que é resistente.

Objetivo. Obter a velocidade do bloco ao fim dos 10 m. O que está em jogo é lembrar que quem determina a variação da energia cinética é a resultante das duas forças, e não a força aplicada sozinha.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.3) e diga o que cada símbolo significa. O atrito cinético vem da Equação (3.14), do cap. 3, com $N = mg$ no piso horizontal.

2 Organizar

Dados $m = 5\,\text{kg}$
$v_i = 0$
$F = 35\,\text{N}$
$\mu_c = 0{,}2$
$d = 10\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia como o piso é horizontal e não há força vertical além do peso e da normal, calcule $N = mg$, depois $f_{at} = \mu_c N$, some as forças horizontais com sinal e aplique o Teorema Trabalho-Energia.

3 Resolver

Normal e atrito cinético. Calcule os dois:

$$N = mg = 5 \times 10 = 50\,\text{N}$$
$$f_{at} = \mu_c N = 0{,}2 \times 50 = 10\,\text{N}$$

Trabalho da resultante. Some as forças horizontais com sinal e multiplique pelo deslocamento:

$$F_R = F - f_{at} = 35 - 10 = 25\,\text{N}$$
$$W_{\text{res}} = F_R\, d = 25 \times 10 = 250\,\text{J}$$

Teorema Trabalho-Energia. Iguale ao ganho de energia cinética e isole v_f:

$$250 = \frac{1}{2} \times 5 \times v_f^2$$
$$v_f^2 = \frac{500}{5} = 100$$

$$\boxed{v_f = 10\,\text{m/s}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: sem atrito o bloco chegaria a $v_f = \sqrt{2 \times 35 \times 10/5} \approx 11{,}8\,\text{m/s}$. O atrito dissipou $10 \times 10 = 100\,\text{J}$ dos $350\,\text{J}$ entregues pela força aplicada, e a velocidade caiu para $10\,\text{m/s}$. Perceba que a redução na velocidade é proporcionalmente menor que a redução na energia, porque a velocidade depende da raiz quadrada da energia. **Cuidado com a pegadinha:** usar $W = Fd = 350\,\text{J}$ como trabalho da resultante ignora o atrito e leva a $11{,}8\,\text{m/s}$. O teorema fala da *resultante*,

não da força que você aplicou.

4.3 Forças Conservativas e Energia Potencial

Algumas forças têm uma propriedade notável: o trabalho que realizam entre dois pontos é sempre o mesmo, qualquer que seja o caminho seguido entre eles. São as **forças conservativas**, e só a elas se pode associar uma energia potencial.

DEFINIÇÃO 4.4 • Força Conservativa

Uma força é **conservativa** quando o trabalho que realiza entre dois pontos não depende da trajetória, apenas das posições inicial e final. Como consequência, seu trabalho em qualquer percurso fechado é nulo. São conservativas a força peso, a força elástica de uma mola ideal e a força elétrica.

DEFINIÇÃO 4.5 • Força Não Conservativa ou Dissipativa

Uma força é **não conservativa** quando o trabalho que realiza depende do caminho percorrido: quanto mais longo o percurso, maior o trabalho em módulo. São não conservativas o atrito cinético, a resistência do ar e a força aplicada por um agente externo.

DICA

Para toda força conservativa existe uma energia potencial E_p tal que $W = -\Delta E_p$. Guarde o sinal negativo: quando a força realiza trabalho positivo, a energia potencial *diminui*, como no corpo que cai e perde altura.

4.3.1 Energia Potencial Gravitacional

DEFINIÇÃO 4.6 • Energia Potencial Gravitacional

A **energia potencial gravitacional** é a energia que um corpo tem por estar a certa altura acima de um nível de referência. Ela mede o trabalho que o peso poderá realizar quando o corpo descer até esse nível.

$$E_{pg} = mgh \tag{4.4}$$

E_{pg}: energia potencial gravitacional (J)
m: massa do corpo (kg)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)
h: altura acima do nível de referência (m)

NOTA

A escolha do nível $h = 0$ é livre, e só as *variações* de E_{pg} têm significado físico. Adote o ponto mais baixo do problema e você evita alturas negativas.

A ligação entre o trabalho do peso e a energia potencial gravitaci-

onal é imediata:

$$W_P = -\Delta E_{pg} = mgh_i - mgh_f$$

EXEMPLO 4.8 • Variação de energia potencial gravitacional

Um guincho eleva uma carga de 200 kg do nível do solo até uma altura de 25 m. ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

a) Qual é a variação de energia potencial gravitacional da carga?
b) Qual é o trabalho realizado pela força peso durante a elevação?

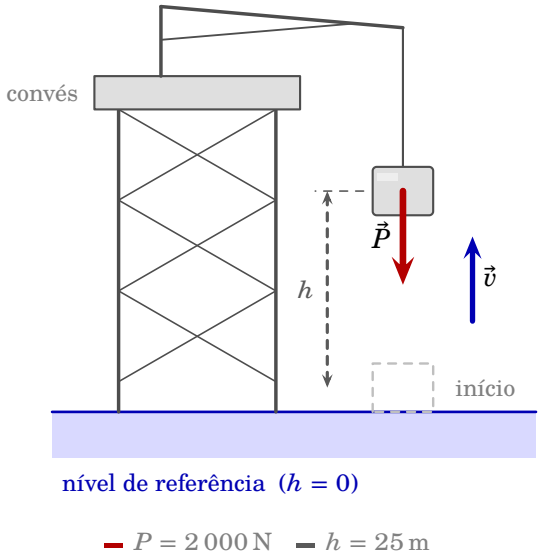


Figura 4.7

1 Compreender

O assunto é a relação entre **energia potencial gravitacional** e **trabalho do peso**, que são a mesma informação com sinais trocados.

Objetivo. Obter a variação da energia potencial da carga e o trabalho do peso durante a elevação. O que está em jogo é os sinais: a carga sobe, então sua energia potencial aumenta; o peso aponta para baixo enquanto o deslocamento é para cima, então o trabalho do peso é negativo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.4) e diga o que cada símbolo significa. A ligação com o trabalho do peso é $W_P = -\Delta E_{pg}$, escrita logo acima.

2 Organizar

Dados
$m = 200\,\text{kg}$
$h_i = 0$ (solo, nível de referência)
$h_f = 25\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: kg, m/s^2 e m dão joule; o resultado pode ser dado em kJ.

Estratégia calcule $\Delta E_{pg} = mg(h_f - h_i)$ e obtenha o trabalho do peso pela relação $W_P = -\Delta E_{pg}$.

3 Resolver

a) Variação da energia potencial. Calcule-a:

$$\begin{aligned}\Delta E_{pg} &= mg\,(h_f - h_i)\\ &= 200 \times 10 \times (25 - 0)\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta E_{pg} = 50\,000\,\text{J} = 50\,\text{kJ}}$$

b) Trabalho do peso. Pela relação com a energia potencial:

$$W_P = -\Delta E_{pg}$$

$$\boxed{W_P = -50\,\text{kJ}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: os dois valores têm o mesmo módulo e sinais opostos, como a relação $W_P = -\Delta E_{pg}$ exige. O sinal negativo do trabalho do peso confere com o ângulo de 180° entre peso e deslocamento. Perceba o que isso significa na prática: o guincho precisa realizar pelo menos +50 kJ de trabalho motor para vencer o peso. Um guindaste real precisa de mais que isso, porque parte da energia se perde em atrito nas polias e no redutor, e é o rendimento (Seção 4.5) que mede essa diferença.

4.3.2 Energia Potencial Elástica

DEFINIÇÃO 4.7 • Energia Potencial Elástica

A **energia potencial elástica** é a energia armazenada numa mola deformada. Ela mede o trabalho que a força elástica poderá realizar quando a mola voltar ao comprimento natural, e é sempre positiva, tanto na compressão quanto na distensão.

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.5}$$

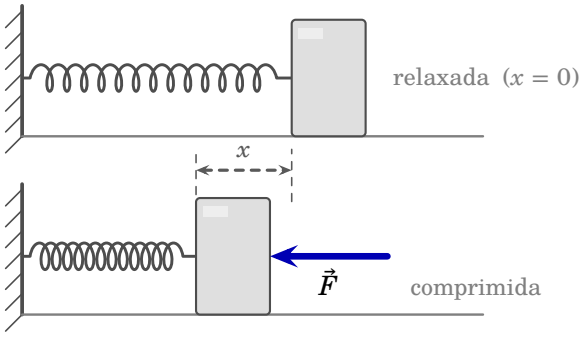
E_{pe}: energia potencial elástica (J)
k: constante elástica da mola (N/m)
x: deformação em relação ao comprimento natural (m)

CUIDADO

A deformação x entra em metros. Enunciado que dá a compressão em centímetros está cobrando essa conversão: $15\,\text{cm} = 0{,}15\,\text{m}$, e o quadrado multiplica o erro por dez mil.

EXEMPLO 4.9 • Energia armazenada em mola

Uma mola de constante elástica $k = 800\,\text{N/m}$ é comprimida 15 cm a partir de sua posição natural. Calcule a energia potencial elástica armazenada.



$\vec{F}$: força que comprime a mola $x = 15$ cm

Figura 4.8

1 Compreender

O assunto é a **energia potencial elástica** de uma mola ideal, que obedece à Lei de Hooke (Equação (3.2), do cap. 3) em toda a compressão.

Objetivo. Obter a energia armazenada na mola comprimida. O que está em jogo é a unidade da deformação, dada em centímetros: ela entra ao quadrado, e o erro de conversão se multiplica por dez mil.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.5) e diga o que cada símbolo significa. É ela, com x em metros.

2 Organizar

Dados $k = 800\,\text{N/m}$
$x = 15\,\text{cm}$.

Conversões $x = 15\,\text{cm} = 0{,}15\,\text{m}$.

Estratégia aplique $E_{pe} = {}^1\!/_2 kx^2$.

3 Resolver

Energia potencial elástica. Aplique a definição, com x em metros:

$$\begin{aligned} E_{pe} &= \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 800 \times (0{,}15)^2 \\ &= 400 \times 0{,}0225 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{pe} = 9\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência por um segundo caminho: a força cresce de 0 a $F = kx = 800 \times 0{,}15 = 120\,\text{N}$ ao longo da compressão, com valor médio de 60 N. O trabalho vale $60 \times 0{,}15 = 9\,\text{J}$, igual ao resultado. Molas de válvulas de segurança (PSV) em plantas de processo trabalham nesse regime, e é a energia armazenada na mola que fixa a pressão de abertura da válvula. **Cuidado com a pegadinha:** esquecer a conversão e usar $x = 15$ daria 90 000 J, dez mil vezes o valor correto, porque a deformação está ao quadrado.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

No esporte radical conhecido como *bungee-jumping*, uma pessoa, presa à extremidade de uma corda elástica, cai, por exemplo, da beira de uma plataforma para as águas de um rio. Sua queda é interrompida a poucos metros da superfície da água, com segurança, pela ação da corda elástica, que tem a outra extremidade firmemente presa à beira da plataforma. A desaceleração sofrida pela pessoa é baixa, devido ao estiramento da corda até que a velocidade de queda se anule.

Suponha que, nas condições citadas acima, a distensão máxima sofrida pela corda, quando usada por um atleta de peso 750 N, é de 10 metros, e que seu comprimento, quando não distendida, é de 30 metros. Despreze o atrito com o ar e a massa da corda, e considere zero o valor da velocidade do atleta no início da queda.

O valor da constante elástica da corda, em N/m, é

(A) 150
(B) 300
(C) 450
(D) 600
(E) 900

6RW46W

4.4 Conservação da Energia Mecânica

Reunindo a energia cinética e as energias potenciais num único número, você obtém a grandeza mais útil deste capítulo.

DEFINIÇÃO 4.8 • Energia Mecânica

A **energia mecânica** de um sistema é a soma da energia cinética com todas as energias potenciais presentes. Ela representa a energia total disponível para o movimento.

$$E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe} \tag{4.6}$$

E_m: energia mecânica do sistema (J)
E_c: energia cinética (J)
E_{pg}: energia potencial gravitacional (J)
E_{pe}: energia potencial elástica (J)

DEFINIÇÃO 4.9 • Conservação da Energia Mecânica

Num sistema em que atuam **apenas forças conservativas**, a energia mecânica permanece constante: ela troca de forma, de potencial para cinética e de volta, mas o total não muda.

$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f} \tag{4.7}$$

$E_{c,i}$, $E_{p,i}$: energias no estado inicial (J)
$E_{c,f}$, $E_{p,f}$: energias no estado final (J)

Quando há forças não conservativas, o atrito à frente de todas, a energia mecânica deixa de ser constante. A variação dela é exatamente o trabalho dessas forças:

$$W_{nc} = \Delta E_m = E_{m,f} - E_{m,i} \tag{4.8}$$

W_{nc}: trabalho das forças não conservativas (J)
$E_{m,i}$: energia mecânica inicial (J)
$E_{m,f}$: energia mecânica final (J)

Como o trabalho do atrito é sempre negativo, essa relação vira, no caso mais comum, $E_{m,f} = E_{m,i} - f_{at}\, d$.

CUIDADO

Antes de escrever $E_{m,i} = E_{m,f}$, procure no enunciado por atrito, resistência do ar ou superfície áspera. Havendo qualquer um deles, a energia mecânica diminui e a diferença vira calor.

EXEMPLO 4.10 • Queda livre usando conservação de energia

Uma pedra de 0,5 kg é solta do repouso a 20 m de altura. Despreze a resistência do ar e use $g = 10\,\text{m/s}^2$. Determine:

a) A velocidade da pedra ao atingir o solo.
b) A velocidade quando ela está a 5 m do solo.

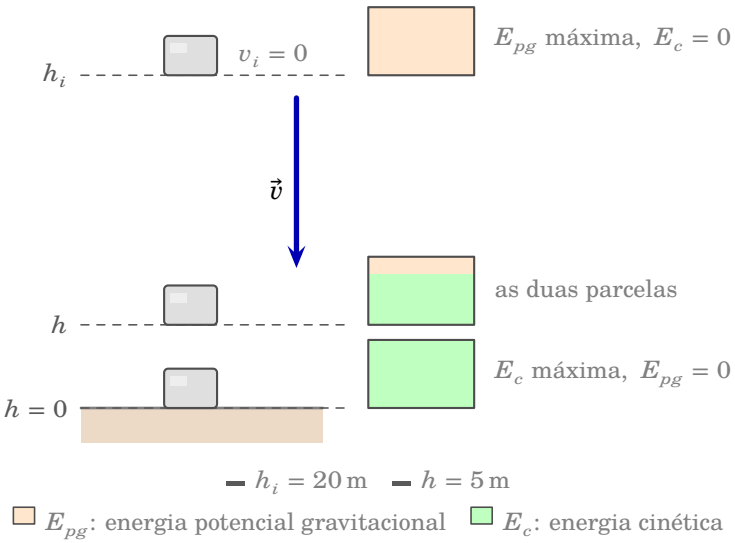


Figura 4.9

1 Compreender

O assunto é a **Conservação da Energia Mecânica** numa queda.

Objetivo. Obter a velocidade da pedra no solo e a 5 m do solo. O que está em jogo é reconhecer que, sem resistência do ar, a única força é o peso, que é conservativo: a energia mecânica se conserva e a energia potencial perdida reaparece integralmente como energia cinética.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.7) e diga o que cada símbolo significa. Adote o solo como referência ($h = 0$) e escreva as duas parcelas em cada ponto.

2 Organizar

Dados $m = 0{,}5\,\text{kg}$
$h_i = 20\,\text{m}$
$v_i = 0$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
sem resistência do ar.

Conversões nenhuma: massa em kg, altura em metros e g em m/s^2.

Estratégia iguale a energia mecânica no topo à energia mecânica no ponto pedido e isole a velocidade.

3 **Resolver**

a) Conservação entre o topo e o solo. No topo há só energia potencial; no solo, só cinética. Iguale as duas e isole v_f:

$$\begin{aligned} mgh_i &= \frac{1}{2}mv_f^2 \\ v_f &= \sqrt{2g\,h_i} \\ &= \sqrt{2\times 10\times 20} = \sqrt{400} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_f = 20\,\text{m/s}}$$

b) Conservação entre o topo e o ponto a 5 m. Ali ainda resta energia potencial. Escreva a conservação entre o topo e esse ponto:

$$\begin{aligned} mgh_i &= \frac{1}{2}mv^2 + mgh \\ v &= \sqrt{2g\,(h_i - h)} \\ &= \sqrt{2\times 10\times 15} = \sqrt{300} \end{aligned}$$

$$\boxed{v \approx 17{,}3\,\text{m/s}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a velocidade a 5 m do solo é menor que a velocidade no solo, como se espera de um corpo que ainda está acelerando. Perceba que a massa foi simplificada nas duas contas, porque aparece nos dois lados da igualdade: a velocidade de queda não depende da massa, resultado que Galileu defendeu séculos antes de Newton escrever suas leis. Em análises de segurança industrial, é essa fórmula que estima a velocidade de impacto de uma ferramenta que cai de uma estrutura em altura.

DICA

Para queda a partir do repouso, $v = \sqrt{2g\,\Delta h}$. Ela não é uma fórmula nova para decorar: sai de $mgh = {}^1\!/_2 mv^2$ dividindo os dois lados por m.

EXEMPLO 4.11 • Trilho curvo sem atrito

Um carrinho de 600 kg parte do repouso do topo de um trilho curvo a $h_i = 30\,\text{m}$ de altura. Desprezando o atrito, qual é a velocidade do carrinho quando ele passa por um ponto a $h_f = 12\,\text{m}$? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

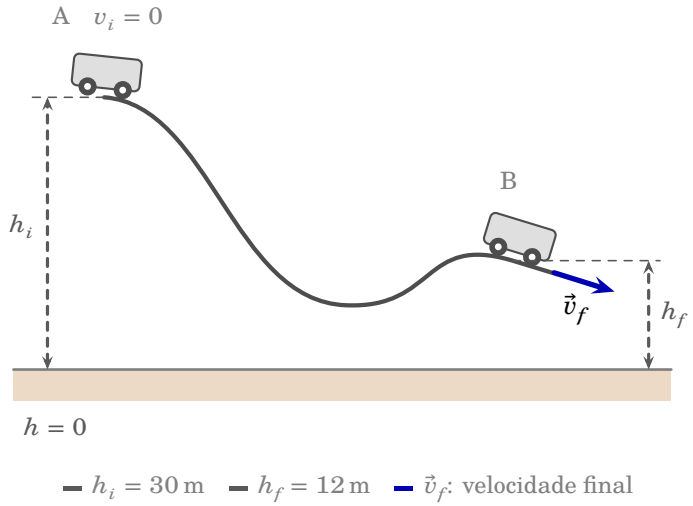


Figura 4.10

1 Compreender

O assunto é a vantagem da **Conservação da Energia Mecânica** sobre a Dinâmica: o trilho é curvo, a direção da velocidade muda o tempo todo e não há como escrever $\vec{F} = m\vec{a}$ ao longo do percurso.

Objetivo. Obter a velocidade do carrinho ao passar pelos 12 m. O que está em jogo é perceber que a energia mecânica só enxerga as duas alturas, e que o desnível que entra na conta é a diferença entre elas, não a altura do topo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.7) e diga o que cada símbolo significa. Sem atrito, ela vale entre quaisquer dois pontos do trilho.

2 Organizar

Dados $m = 600\,\text{kg}$
$h_i = 30\,\text{m}$
$v_i = 0$
$h_f = 12\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
sem atrito.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia iguale as energias mecânicas nos dois pontos, divida os dois lados por m e isole v_f.

3 Resolver

Conservação entre A e B. Escreva-a:

$$mgh_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f$$

Velocidade. Divida os dois lados por m e isole-a:

$$\begin{aligned} g\,(h_i - h_f) &= \frac{1}{2}v_f^2 \\ v_f &= \sqrt{2g\,(h_i - h_f)} \\ &= \sqrt{2 \times 10 \times 18} = \sqrt{360} \end{aligned}$$

$$v_f \approx 19\,\text{m/s}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o desnível efetivo é 18 m, um pouco menor que os 20 m do exemplo anterior, e a velocidade saiu um pouco menor que os 20 m/s de lá. Confere. A massa de 600 kg não entrou na conta, e nem o formato do trilho: dois carrinhos de massas diferentes, em trilhos de desenhos diferentes, chegam aos 12 m com a mesma velocidade, desde que partam do repouso da mesma altura. **Cuidado com a pegadinha:** a altura que entra na conta é a diferença $h_i - h_f = 18$ m, não os 30 m do topo. Usar 30 daria $\sqrt{600} \approx 24{,}5$ m/s, resposta clássica de distrator.

EXEMPLO 4.12 • Plano inclinado com dissipação

Um bloco de 2 kg é abandonado do topo de um plano inclinado de $h = 5\,\text{m}$ de altura. A força de atrito durante a descida realiza um trabalho de $-60\,\text{J}$. Qual é a velocidade do bloco ao atingir a base? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

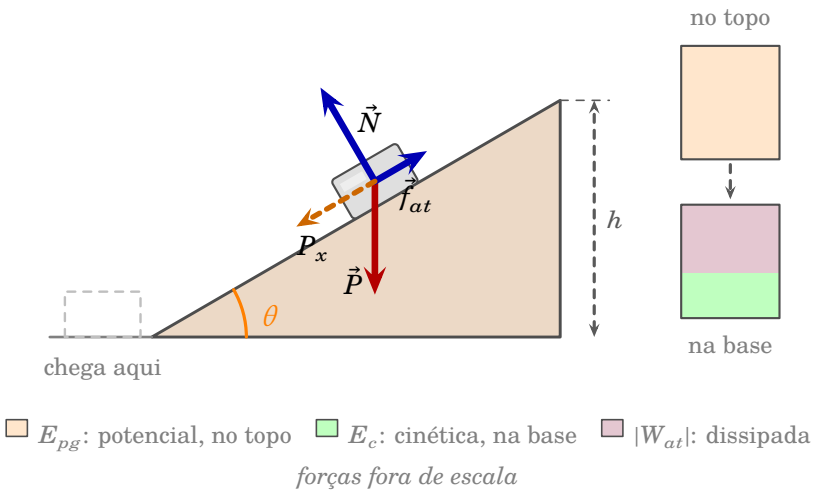


Figura 4.11

1 Compreender

O assunto é a **energia mecânica com dissipação**: há atrito, então ela não se conserva, e parte dela vira calor.

Objetivo. Obter a velocidade do bloco ao chegar à base. O que está em jogo é somar o trabalho do atrito com o sinal que ele tem: o balanço é $E_{m,f} = E_{m,i} + W_{at}$, com W_{at} negativo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.8) e diga o que cada símbolo significa. Ela é a conservação corrigida pelo trabalho das forças não conservativas.

2 Organizar

Dados $m = 2\,\text{kg}$
$h = 5\,\text{m}$
$v_i = 0$
$W_{at} = -60\,\text{J}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia calcule a energia mecânica no topo, some o trabalho negativo do atrito para obter a energia mecânica na base, e leia essa energia como energia cinética.

3 **Resolver**

Energia mecânica no topo. Ali só há energia potencial:

$$\begin{aligned} E_{m,i} &= mgh \\ &= 2 \times 10 \times 5 = 100\,\text{J} \end{aligned}$$

Energia mecânica na base. Some o trabalho do atrito:

$$\begin{aligned} E_{m,f} &= E_{m,i} + W_{at} \\ &= 100 + (-60) = 40\,\text{J} \end{aligned}$$

Velocidade na base. Com $h_f = 0$, toda essa energia é cinética. Isole v_f:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_f^2 &= 40 \\ v_f^2 &= \frac{2 \times 40}{2} = 40 \\ v_f &= \sqrt{40} \end{aligned}$$

$$v_f \approx 6{,}3\,\text{m/s}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: sem atrito o bloco chegaria a $v_f = \sqrt{2gh} = 10\,\text{m/s}$, e com atrito chegou mais devagar, como tem de ser. Dos 100 J disponíveis, 60 J viraram calor e apenas 40 J chegaram como movimento. Em dutos e ramais inclinados o atrito de parede consome a energia do fluido do mesmo modo, e essa parcela aparece como termo de perda de carga na equação de Bernoulli estendida. **Cuidado com a pegadinha:** some o trabalho do atrito com o sinal que ele tem. Escrever $E_{m,f} = 100 + 60 = 160\,\text{J}$ faz o atrito acelerar o bloco, o que nenhum atrito faz.

> **EXEMPLO 4.13** • Altura máxima no lançamento vertical
>
> Um corpo de 2 kg é lançado verticalmente para cima com velocidade inicial de 30 m/s. Desprezando a resistência do ar e adotando $g = 10\,\text{m/s}^2$, determine a altura máxima atingida pelo corpo.

1 **Compreender**

O assunto é a **Conservação da Energia Mecânica** na subida: sem resistência do ar, o corpo sobe convertendo energia cinética em energia

potencial gravitacional.

Objetivo. Obter a altura máxima atingida pelo corpo. O que está em jogo é a condição do ponto mais alto: ali o corpo para por um instante, e toda a energia cinética inicial já virou potencial.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.7) e diga o que cada símbolo significa. Com $v_f = 0$ no ponto mais alto, só uma parcela sobrevive de cada lado.

2 Organizar

Dados $m = 2\,\text{kg}$
$v_i = 30\,\text{m/s}$
$v_f = 0$ na altura máxima
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$h_i = 0$ (solo como referência).

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia iguale a energia cinética inicial à energia potencial no ponto mais alto e isole a altura.

3 Resolver

Conservação até o ponto mais alto. Escreva-a:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mg\,h_{\text{máx}}$$

Altura máxima. Divida os dois lados por m e isole-a:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_i^2}{2g}$$
$$= \frac{30^2}{2\times 10} = \frac{900}{20}$$

$$\boxed{h_{\text{máx}} = 45\,\text{m}}$$

4 Avaliar

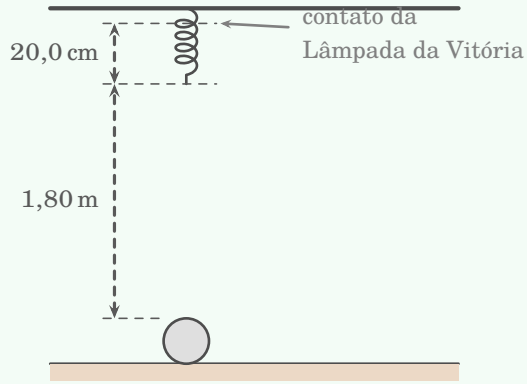
Avalie a coerência pela Cinemática: $v^2 = v_i^2 - 2g\,h$ com $v = 0$ dá $h = 900/20 = 45\,\text{m}$, o mesmo valor. A massa de 2 kg foi simplificada e não influencia o resultado: uma pedra e um caminhão lançados a 30 m/s sobem igual, desde que o ar não conte. Guarde a expressão $h_{\text{máx}} = v_i^2/(2g)$, que é a companheira de $v = \sqrt{2gh}$: uma descreve a subida, a outra a descida.

CWQ2W2

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014

Em um brinquedo de parque de diversões, uma bola de 500 g deve ser arremessada verticalmente para cima, atingir uma mola após percorrer 1,80 m, e comprimi-la 20,0 cm de modo a acender a Lâmpada da Vitória, como mostra a figura.



compressão da mola exagerada para leitura

Figura 4.12

Considerando os atritos desprezíveis e a mola ideal, qual deve ser, aproximadamente, em m/s, a velocidade inicial mínima da bola para que a Lâmpada da Vitória seja acesa?

Dados: aceleração da gravidade $= 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; constante elástica da mola $= 750\,\text{N/m}$.

(A) 4,50

(B) 10,0

(C) 12,6

(D) 15,0

(E) 25,0

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014

A figura mostra um pêndulo simples que consiste em uma partícula que oscila sem atrito entre os pontos P e R.

N56NY6

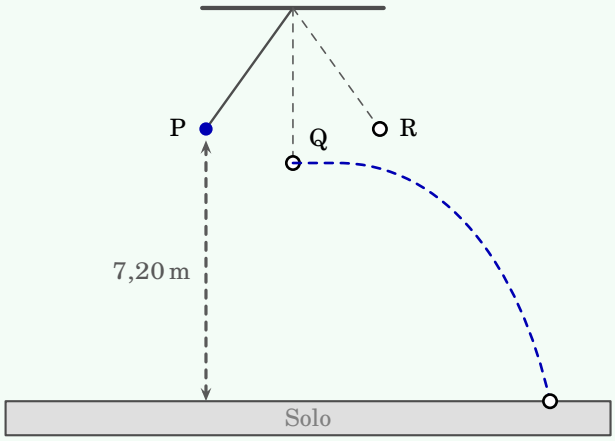


Figura 4.13

Suponha que, em determinado momento, a partícula se solte do fio no ponto Q e percorra sem atrito até o solo a trajetória mostrada na figura.

Qual é, aproximadamente, em m/s, o módulo da velocidade da partícula ao atingir o solo?

Dado: aceleração da gravidade $= 10{,}0\,\text{m/s}^2$

(A) 12,0

(B) 14,4

(C) 24,0

(D) 36,0

(E) 72,0

4.5 Potência e Rendimento

Até aqui você calculou *quanta* energia foi transferida. A **potência** responde a outra pergunta: *com que rapidez*. Dois motores podem realizar o mesmo trabalho total, e aquele que o faz em menos tempo é o mais potente.

4.5.1 Potência

DEFINIÇÃO 4.10 • Potência Média

A **potência média** é a energia transferida por unidade de tempo. Ela mede a rapidez com que uma máquina realiza trabalho, e é o que se compra ao especificar um motor.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \tag{4.9}$$

P: potência média (W = J/s)
W: trabalho realizado (J)
ΔE: energia transferida (J)
Δt: intervalo de tempo (s)

DEFINIÇÃO 4.11 • Potência Instantânea

A **potência instantânea** é a potência num dado instante, calculada a partir da força e da velocidade do corpo naquele instante. É a forma mais prática quando o movimento tem velocidade constante.

$$P = F v \cos\theta \tag{4.10}$$

P: potência instantânea (W)
F: módulo da força (N)
v: módulo da velocidade (m/s)
θ: ângulo entre a força e a velocidade

NOTA

Quando a força tem a direção e o sentido da velocidade, $\cos\theta = 1$ e a expressão se reduz a $P = Fv$, que é a forma cobrada em quase toda questão de guincho e de veículo em velocidade constante.

NOTA

Outras unidades de potência que aparecem em catálogos de equipamento:

- $1\,\text{kW} = 1\,000\,\text{W}$
- $1\,\text{MW} = 10^6\,\text{W}$
- $1\,\text{cv} = 735{,}5\,\text{W}$ (cavalo-vapor, sistema métrico)
- $1\,\text{hp} = 745{,}7\,\text{W}$ (*horse-power*, sistema inglês)

Em prova, use a aproximação $1\,\text{cv} \approx 736\,\text{W}$.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Uma bomba centrífuga de 1 000 W de potência localiza-se no andar térreo de um edifício. Desprezando-se todas as perdas por atrito na tubulação e dissipações de energia no percurso, quanto tempo é necessário para essa bomba encher completamente uma caixa d'água de 6 000 litros, inicialmente vazia, localizada a uma altura de 30 m do chão?

Dados: $g = 10\,\text{m/s}^2$; $\mu_{\text{água}}$ (massa específica da água) $= 1{,}0\,\text{kg/L}$

(A) 30 min
(B) 60 min
(C) 90 min
(D) 120 min
(E) 150 min

CNHBMF

4.5.2 Rendimento

Máquina real nenhuma aproveita toda a energia que recebe. Parte se dissipa em calor por atrito interno, perdas elétricas ou viscosidade do fluido, e o que sobra é o que a máquina de fato entrega.

DEFINIÇÃO 4.12 • Rendimento

O **rendimento** de uma máquina é a fração da energia recebida que ela converte em trabalho útil. É um número adimensional entre 0 e 1, normalmente expresso em porcentagem.

$$\eta = \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{total}}} \tag{4.11}$$

η: rendimento (adimensional)
$P_{\text{útil}}$: potência aproveitada na tarefa (W)
P_{total}: potência fornecida à máquina (W)

DICA

Quando a questão dá o rendimento e pede a potência do motor, inverta: $P_{\text{motor}} = P_{\text{útil}}/\eta$. Como $\eta < 1$, o motor sempre consome mais do que entrega. Se a sua conta der o contrário, você dividiu ao contrário.

EXEMPLO 4.14 • Potência de uma bomba

Uma bomba eleva 500 L de água por minuto até um reservatório a 12 m de altura. Determine a potência mínima necessária. ($g = 10\,\text{m/s}^2$; $\rho_{\text{água}} = 1\,\text{kg/L}$)

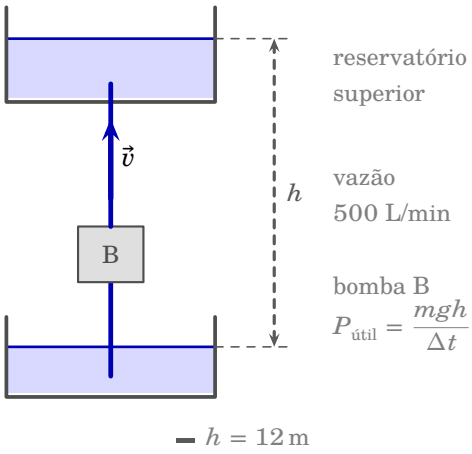


Figura 4.14

1 Compreender

O assunto é a **potência útil** de um bombeamento: a bomba entrega energia potencial gravitacional à água, e cada quilograma que sobe 12 m ganha mgh de energia.

Objetivo. Obter a potência mínima que a bomba precisa entregar à água. O que está em jogo é ler "mínima" como caso ideal, com rendimento de 100% e sem perda de carga na tubulação, e transformar a vazão em massa por segundo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.9) e diga o que cada símbolo significa. Com $\Delta E = mgh$, ela vira $P = \dot{m}\,g\,h$, em que $\dot{m}$ é a massa elevada por segundo.

2 Organizar

Dados vazão $Q = 500\,\text{L/min}$
$h = 12\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\rho = 1\,\text{kg/L}$.

Conversões $\dot{m} = 500\,\text{kg}/60\,\text{s} \approx 8{,}33\,\text{kg/s}$.

Estratégia aplique $P = \dot{m}\,g\,h$, que é mgh dividido pelo tempo.

3 **Resolver**

Potência útil. Calcule a energia potencial entregue por segundo:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta E_{pg}}{\Delta t} = \dot{m}\, g\, h \\ &= \frac{500}{60} \times 10 \times 12 \\ &= \frac{60\,000}{60} \end{aligned}$$

$$P = 1\,000\,\text{W} = 1\,\text{kW}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 1 kW para elevar meia tonelada de água por minuto a 12 m é a faixa de um motor monofásico comum, como os de bomba de recalque predial. Perceba que a potência é proporcional tanto à vazão quanto à altura: dobrar qualquer uma das duas dobra a potência exigida. Como o enunciado pediu o mínimo, esse é o piso: uma bomba real com rendimento de 80% precisaria de $1{,}0/0{,}8 = 1{,}25$ kW no eixo.

> EXEMPLO 4.15 • Potência instantânea de um guincho
>
> Um motor eleva uma carga de 800 kg com velocidade constante de 2 m/s. Qual é a potência desenvolvida pelo motor? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

1 **Compreender**

O assunto é a **potência instantânea** num içamento.

Objetivo. Obter a potência que o motor desenvolve ao içar a carga. O que está em jogo é a expressão "velocidade constante": sem aceleração, a resultante é nula e a força do cabo iguala o peso da carga.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.10) e diga o que cada símbolo significa. Força e velocidade apontam ambas para cima, então $\cos\theta = 1$ e ela se reduz a $P = Fv$.

2 **Organizar**

Dados $m = 800\,\text{kg}$
$v = 2\,\text{m/s}$, constante
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI; o resultado pode ser dado em kW.

Estratégia use a Primeira Lei de Newton para concluir que a força do cabo é igual ao peso, $F = mg$, e aplique $P = Fv$.

3 **Resolver**

Força do cabo. É igual ao peso, porque a velocidade é constante:

$$\begin{aligned} F &= mg \\ &= 800 \times 10 = 8\,000\,\text{N} \end{aligned}$$

Potência. Multiplique a força pela velocidade:

$$\begin{aligned} P &= Fv \\ &= 8\,000 \times 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 16\,000\,\text{W} = 16\,\text{kW}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 16 kW equivalem a cerca de $16\,000/736 \approx 22$ cv, faixa compatível com guinchos de plataforma e pórticos de contêiner para cargas médias. Perceba que a relação $P = Fv$ é linear na velocidade: içar a mesma carga ao dobro da velocidade custa o dobro da potência, embora o trabalho total seja o mesmo. É por isso que a velocidade de içamento, e não só a carga, define o motor a especificar.

> EXEMPLO 4.16 • Rendimento de um conjunto motor-bomba
>
> Um motor elétrico consome 5 kW ao acionar uma bomba que eleva 3 000 kg de água por minuto até 8 m de altura. Qual é o rendimento do conjunto? ($g = 10\,\text{m/s}^2$)

1 **Compreender**

O assunto é o **rendimento** de um conjunto motor-bomba.

Objetivo. Obter a fração da energia elétrica consumida que vira elevação de água. O que está em jogo é distinguir as duas potências: a total é a que o motor consome da rede, e a útil é a que de fato chega à água, como energia potencial gravitacional por segundo.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.11) e diga o que cada símbolo significa. A potência útil sai de $P = \dot{m}\,g\,h$, como no exemplo anterior.

2 **Organizar**

Dados $P_{\text{total}} = 5\,\text{kW}$
3 000 kg de água por minuto
$h = 8\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões $P_{\text{total}} = 5\,000\,\text{W}$
$\dot{m} = 3\,000/60 = 50\,\text{kg/s}.$

Estratégia calcule $P_{\text{útil}} = \dot{m}\,g\,h$ e divida pela potência consumida.

3 Resolver

Potência útil. Calcule a potência entregue à água:

$$\begin{aligned} P_{\text{útil}} &= \dot{m}\,g\,h \\ &= 50 \times 10 \times 8 = 4\,000\,\text{W} \end{aligned}$$

Rendimento. Divida pela potência consumida:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{P_{\text{útil}}}{P_{\text{total}}} \\ &= \frac{4\,000}{5\,000} = 0{,}80 \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = 80\%}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 80% está dentro da faixa de 65% a 85% típica de conjuntos motor-bomba bem dimensionados, então o resultado é plausível. Os 1 kW que faltam se perdem em aquecimento do motor, atrito nos mancais e turbulência no rotor. Um rendimento muito abaixo dessa faixa, medido em campo, aponta bomba superdimensionada, tubulação inadequada ou cavitação, e é exatamente esse cálculo que abre uma auditoria energética de instalação de bombeamento em refinaria.

> **EXEMPLO 4.17** • Potência do motor a partir do rendimento
>
> Uma bomba deve elevar 1 200 L de água por minuto de um reservatório inferior até um tanque a 15 m de altura. Se o rendimento global da instalação é de 75%, qual deve ser a potência mínima do motor elétrico? ($g = 10\,\text{m/s}^2$; $\rho_{\text{água}} = 1\,\text{kg/L}$)

1 Compreender

O assunto é o caminho inverso do exemplo anterior: o **rendimento** é dado e a incógnita é a **potência do motor**.

Objetivo. Obter a potência mínima do motor elétrico. O que está em jogo é dividir, e não multiplicar, pelo rendimento: o motor tem de consumir mais do que entrega, porque desperdiça 25%.

Antes de seguir, escreva a Equação (4.11) e diga o que cada símbolo significa. Calcule primeiro a potência útil, a que precisa chegar à água, e depois isole a potência total.

2 Organizar

Dados $Q = 1\,200\,\text{L/min}$
$h = 15\,\text{m}$
$\eta = 75\% = 0{,}75$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$\rho = 1\,\text{kg/L}$.

Conversões $\dot{m} = 1\,200/60 = 20\,\text{kg/s}$.

Estratégia calcule $P_{\text{útil}} = \dot{m}\,g\,h$ e divida pelo rendimento.

3 Resolver

Potência útil. Calcule a entregue à água:

$$\begin{aligned} P_{\text{útil}} &= \dot{m}\,g\,h \\ &= 20 \times 10 \times 15 = 3\,000\,\text{W} \end{aligned}$$

Potência do motor. Divida pelo rendimento:

$$\begin{aligned} P_{\text{motor}} &= \frac{P_{\text{útil}}}{\eta} \\ &= \frac{3\,000}{0{,}75} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{\text{motor}} = 4\,000\,\text{W} = 4{,}0\,\text{kW}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o motor precisa de 4 kW para entregar 3 kW à água, ou seja, consome mais do que entrega, como todo motor real. Perceba que a diferença de 1 kW é exatamente a parcela dissipada, e que ela cresce depressa quando o rendimento cai: a 50%, o mesmo serviço exigiria 6 kW. Este é o roteiro fixo das questões de bomba na Cesgranrio, primeiro $P_{\text{útil}} = \dot{m}\,g\,h$, depois $P_{\text{motor}} = P_{\text{útil}}/\eta$. **Cuidado com a pegadinha:** multiplicar por 0,75 em vez de dividir daria 2,25 kW, um motor menor que a potência útil. Sempre que o resultado for menor que $P_{\text{útil}}$, você inverteu a operação.

CAIU NA PETROBRAS

YTMRGZ

CESGRANRIO — BR Distribuidora, Operação, 2012

Em um edifício, uma bomba d'água é utilizada para elevar água de uma cisterna para a caixa localizada a 20 m de altura acima dessa cisterna. A fim de avaliar o rendimento do sistema, um técnico mediu e anotou os seguintes valores:

- Voltagem aplicada à bomba: 220 V
- Intensidade da corrente que atravessa a bomba: 10 A
- Tempo necessário para elevar 500 L de água: 2,5 minutos

Com base nesses dados, a razão entre a energia mecânica utilizada para elevar a água e a energia elétrica fornecida à bomba durante esse processo é, aproximadamente,

Dados: densidade da água = 1,0 kg/L; aceleração da gravidade = 10 m/s^2

(A) 0,20

(B) 0,30

(C) 0,40

(D) 0,50

(E) 0,60

CAPÍTULO

5

Mecânica dos Fluidos

Vivemos submersos no fundo de um oceano de ar elementar, que, por experiências indubitáveis, se sabe que pesa.

EVANGELISTA TORRICELLI

Setenta e seis centímetros. Foi onde a coluna de mercúrio parou quando Torricelli encheu um tubo, o emborcou numa bacia e esperou, e foi desse número que ele tirou a explicação que escreveu em 11 de junho de 1644 a Michelangelo Ricci, amigo e matemático em Roma. A carta, reunida depois nas *Opere* de Torricelli, mudou a imagem que se tinha do mundo: não vivemos sob o ar, vivemos no fundo dele, e é o peso dessa coluna de ar que sustenta o mercúrio. Pressão é a grandeza central deste capítulo, e o barômetro de Torricelli é o primeiro manômetro de coluna, o mesmo instrumento que você vai reencontrar em vasos comunicantes, tanques e dutos.

A **Mecânica dos Fluidos** estuda o comportamento de líquidos e gases, tanto em repouso (**Hidrostática**) quanto em movimento (**Hidrodinâmica**). É um dos ramos mais antigos da Física: os princípios de Arquimedes (séc. III a.C.) e de Pascal (séc. XVII) já eram aplicados muito antes de Newton enunciar suas leis. A diferença em relação aos capítulos anteriores é o objeto. Até aqui você analisou corpos rígidos, que se movem inteiros; agora o objeto se deforma, escoa e transmite pressão em todas as direções, e por isso a grandeza central deixa de ser a força e passa a ser a pressão.

Para a indústria de petróleo e gás, este é o capítulo mais aplicado

do livro. O dimensionamento de tanques de armazenamento e de dutos de transferência, o cálculo de empuxo e de estabilidade de plataformas semissubmersíveis, o acionamento dos sistemas hidráulicos de perfuração, a separação água-óleo nos separadores de produção e a medição de vazão em oleodutos são todos aplicação direta de Stevin, Pascal, Arquimedes, da Equação da Continuidade e de Bernoulli. A banca Cesgranrio reflete isso: Fluidos é o assunto com maior número de questões nas provas de nível médio da Petrobras e da Transpetro, com forte concentração em pressão hidrostática, empuxo e vazão.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Calcular densidade, peso específico e pressão, e converter entre as unidades de pressão usadas na indústria;
- Aplicar o Teorema de Stevin para achar a pressão a uma dada profundidade;
- Distinguir pressão absoluta de pressão manométrica, que é o que o instrumento indica;
- Resolver vasos comunicantes e manômetros de coluna com dois líquidos;
- Usar o Princípio de Pascal em prensas e elevadores hidráulicos;
- Determinar o empuxo e decidir se um corpo flutua, afunda ou fica em equilíbrio;
- Calcular a fração submersa de um corpo que flutua e o calado de uma embarcação;
- Relacionar vazão volumétrica, vazão mássica e velocidade de escoamento;
- Aplicar a Equação da Continuidade em tubulações que mudam de diâmetro;
- Aplicar a Equação de Bernoulli e o Teorema de Torricelli em escoamentos ideais.

5.1 Densidade e Pressão

Duas grandezas sustentam todo o capítulo. A densidade diz quanta matéria está empacotada em cada metro cúbico de fluido, e é ela que decide o que flutua e o que afunda. A pressão diz como uma força se distribui sobre uma superfície, e é ela que se propaga pelo fluido e aciona todo sistema hidráulico.

5.1.1 Densidade

DEFINIÇÃO 5.1 • Densidade

A **densidade**, também chamada de **massa específica**, mede quanta massa existe em cada unidade de volume de uma substância. É ela que compara substâncias diferentes: entre dois líquidos, o mais denso é o que leva mais massa no mesmo volume, e é o que fica por baixo quando os dois são colocados no mesmo recipiente.

$$\rho = \frac{m}{V} \tag{5.1}$$

ρ: densidade ou massa específica ($\mathrm{kg/m^3}$)
m: massa da substância (kg)
V: volume ocupado ($\mathrm{m^3}$)

NOTA

Densidades de referência que a banca costuma fornecer, ou esperar que você reconheça:

- Água a 4 °C: $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$
- Água do mar: $1\,025\,\mathrm{kg/m^3}$
- Petróleo, faixa usual: 800 a $950\,\mathrm{kg/m^3}$
- Gasolina: $700\,\mathrm{kg/m^3}$
- Mercúrio: $13\,600\,\mathrm{kg/m^3}$
- Ar nas CNTP: $1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$

DICA

A conversão que mais aparece em prova é $1\,\mathrm{g/cm^3} = 1\,\mathrm{kg/L} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$. Guarde na forma do fator: para passar de g/cm³ a kg/m³, multiplique por $1\,000$.

NOTA

O petróleo é menos denso que a água, e por isso flutua sobre ela. Essa única propriedade é a base da separação água-óleo por gravidade nos separadores de produção.

5.1.2 Peso Específico

DEFINIÇÃO 5.2 • Peso Específico

O **peso específico** mede o peso de cada unidade de volume do fluido. Ele carrega a mesma informação que a densidade, mas já multiplicada pela gravidade, o que é conveniente sempre que o problema envolve força e não massa. Perceba a diferença de leitura: a densidade é massa por volume, o peso específico é peso por volume.

$$\gamma = \rho g \tag{5.2}$$

γ: peso específico ($\mathrm{N/m^3}$)
ρ: densidade do fluido ($\mathrm{kg/m^3}$)
g: aceleração da gravidade ($\mathrm{m/s^2}$)

CUIDADO

A banca já cobrou a definição em palavras. Peso específico é o **peso do fluido por unidade de volume**, não a massa por unidade de volume, que é a densidade.

5.1.3 Pressão

DEFINIÇÃO 5.3 • Pressão

A **pressão** mede como uma força se distribui sobre a superfície em que ela age. Duas forças de mesmo módulo produzem pressões muito diferentes se as áreas de apoio forem diferentes, e é por isso que um salto fino afunda no carpete e um pé descalço não. Só a componente *normal* à superfície, isto é, perpendicular a ela, produz pressão.

$$p = \frac{F}{A} \tag{5.3}$$

p: pressão sobre a superfície ($\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$)
F: módulo da força normal (N)
A: área da superfície de apoio ($\mathrm{m^2}$)

NOTA

A unidade do SI é o pascal, mas a indústria trabalha com outras. Guarde estas equivalências:

- $1\,\mathrm{atm} = 101\,325\,\mathrm{Pa} \approx 10^5\,\mathrm{Pa}$
- $1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa}$
- $1\,\mathrm{kgf/cm^2} \approx 98\,066\,\mathrm{Pa} \approx 1\,\mathrm{atm}$
- $1\,\mathrm{mmHg} = 133{,}3\,\mathrm{Pa}$, usada em manometria
- $1\,\mathrm{psi} = 6\,895\,\mathrm{Pa}$, do sistema inglês

Na prática, a cadeia que resolve quase toda conversão de prova é $1\,\mathrm{atm} \approx 10^5\,\mathrm{Pa} \approx 1\,\mathrm{bar} \approx 760\,\mathrm{mmHg} \approx 10\,\mathrm{m.c.a.}$

DICA

Adote $p_{atm} = 10^5$ Pa salvo indicação em contrário. É a aproximação que a Cesgranrio usa nos enunciados, e ela deixa as contas redondas.

EXEMPLO 5.1 • Densidade de um óleo armazenado

Um recipiente contém $850\,\mathrm{m^3}$ de líquido com massa total de 714 toneladas. Determine a densidade do líquido, em $\mathrm{kg/m^3}$.

1 Compreender

O assunto é a **densidade** a partir da massa e do volume, que é a própria definição.

Objetivo. Obter quantos quilogramas de líquido cabem em cada metro cúbico do recipiente. O que está em jogo é a unidade: a massa vem em toneladas e a resposta é pedida em kg/m³, então a conversão tem de vir antes da divisão.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.1) e diga o que cada símbolo significa. Uma tonelada são 1 000 quilogramas.

2 Organizar

Dados $V = 850\,\mathrm{m}^3$
$m = 714\,\mathrm{t}$.

Conversões $m = 714\,\mathrm{t} = 714 \times 1\,000 = 714\,000\,\mathrm{kg}$.

Estratégia divida a massa, em quilogramas, pelo volume, usando a Equação (5.1).

3 Resolver

Densidade. Divida a massa, já em quilogramas, pelo volume:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{714\,000}{850}$$

$$\boxed{\rho = 840\,\mathrm{kg/m}^3}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $840\,\mathrm{kg/m}^3$ cai na faixa dos petróleos, entre 800 e $950\,\mathrm{kg/m}^3$, e fica abaixo da densidade da água, o que confere com um óleo que flutua. Na classificação comercial, essa densidade corresponde a um óleo leve, de grau API acima de 31, o mais valioso porque rende mais gasolina e nafta no refino. Para efeito de comparação, o óleo do pré-sal brasileiro tem em geral de 28 a 30 graus API, cerca de $880\,\mathrm{kg/m}^3$, o que o classifica como óleo médio. Perceba que a densidade não depende de quanto líquido há no tanque: se você retirasse metade do volume, a razão massa por volume continuaria $840\,\mathrm{kg/m}^3$.

> **EXEMPLO 5.2** • Pressão sobre um disco
>
> Um disco circular de 10 cm de diâmetro suporta uma força normal de 7 850 N. Qual é a pressão exercida sobre o disco, em kPa? Use $\pi \approx 3{,}14$.

1 Compreender

O assunto é a definição de **pressão**, força normal dividida por área.

Objetivo. Obter a pressão que a força produz sobre a superfície do disco, em kPa. O que está em jogo é a área: o enunciado dá o diâmetro, e a fórmula da área do círculo usa o raio, então passe o diâmetro para metros e divida por dois antes de qualquer conta.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.3) e diga o que cada símbolo significa. A força já vem pronta; o trabalho está na área.

2 Organizar

Dados $d = 10\,\text{cm}$
$F = 7\,850\,\text{N}$
$\pi \approx 3{,}14$.

Conversões $d = 10\,\text{cm} = 0{,}1\,\text{m}$.

Estratégia calcule o raio, depois a área do círculo, e leve os dois valores à Equação (5.3).

3 Resolver

Área do disco. Obtenha o raio e a área da seção circular:

$$\begin{aligned} r &= \frac{d}{2} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05\,\text{m} \\ A &= \pi r^2 \\ &= 3{,}14 \times (0{,}05)^2 \\ &= 3{,}14 \times 0{,}0025 = 0{,}00785\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Pressão. Divida a força pela área:

$$\begin{aligned} p &= \frac{F}{A} \\ &= \frac{7\,850}{0{,}00785} \end{aligned}$$

$$\boxed{p = 1{,}0 \times 10^6\,\text{Pa} = 1\,000\,\text{kPa}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 1 000 kPa equivalem a 10 bar, cerca de 10 atm. É um valor alto para uma força de menos de 8 kN, e o motivo é a área pequena, menos de $80\,\text{cm}^2$. Essa leitura é a física de toda válvula de segurança: ela abre quando a pressão interna, agindo sobre a área do disco de vedação, gera força suficiente para vencer a mola. Quem determina a abertura é a pressão, não a força isolada. **Cuidado**

com a pegadinha: usar o diâmetro no lugar do raio em $A = \pi r^2$ quadruplica a área e divide a pressão por quatro. Escreva o raio numa linha separada antes de elevar ao quadrado.

5.2 Pressão Hidrostática e o Teorema de Stevin

Mergulhe alguns metros numa piscina e você sente a pressão nos ouvidos aumentar. O que você está sentindo é o peso da coluna de água acima de você, distribuído sobre a superfície do seu corpo. Stevin transformou essa percepção em uma equação.

DEFINIÇÃO 5.4 • Teorema de Stevin

Num fluido homogêneo em equilíbrio, a diferença de pressão entre dois pontos depende apenas do desnível *vertical* entre eles. Deslocar-se horizontalmente dentro do fluido não muda a pressão; descer, sim. O termo $\rho g h$ é o peso da coluna de fluido acima do ponto, dividido pela área sobre a qual essa coluna se apoia.

$$\Delta p = \rho g \, \Delta h \tag{5.4}$$

Δp: diferença de pressão entre os dois pontos (Pa)
ρ: densidade do fluido (kg/m^3)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)
Δh: desnível vertical entre os pontos (m)

Quando um dos pontos está na superfície livre, sobre a qual atua a atmosfera, a expressão toma a forma que você mais vai usar em prova:

$$p = p_0 + \rho g h \tag{5.5}$$

p: pressão absoluta na profundidade h (Pa)
p_0: pressão na superfície livre, em geral p_{atm} (Pa)
ρ: densidade do fluido (kg/m^3)
h: profundidade medida a partir da superfície (m)

DEFINIÇÃO 5.5 • Pressão Manométrica

A **pressão manométrica**, também chamada de pressão relativa, é o quanto a pressão de um ponto excede a pressão atmosférica. É o que quase todo instrumento industrial indica, porque o mostrador é calibrado com o zero na atmosfera. A **pressão absoluta** é a soma da manométrica com a atmosférica.

$$p_{man} = p_{abs} - p_{atm} = \rho g h \tag{5.6}$$

p_{man}: pressão manométrica, indicada pelo instrumento (Pa)
p_{abs}: pressão absoluta no ponto (Pa)
p_{atm}: pressão atmosférica local (Pa)

NOTA

Três consequências do Teorema de Stevin que a banca cobra com frequência:

- Pontos na **mesma profundidade**, no mesmo fluido contínuo, têm a mesma pressão;
- A pressão cresce **linearmente** com a profundidade, e o gráfico $p \times h$ é uma reta cujo coeficiente angular é ρg;
- A pressão **não depende da forma nem do volume** do recipiente, apenas da altura da coluna. É o chamado paradoxo hidrostático: um tubo fino e alto produz no fundo a mesma pressão que um tanque largo de mesma altura.

CUIDADO

Antes de calcular, identifique se o enunciado fornece pressão **absoluta** ou **manométrica**. Trocar uma pela outra muda o resultado em 10^5 Pa, e a banca sempre põe as duas entre as alternativas.

EXEMPLO 5.3 • Pressão no fundo de um tanque

Um tanque cilíndrico contém um líquido de densidade $\rho = 850\,\text{kg/m}^3$ até uma altura de 12 m. Calcule a pressão manométrica e a pressão absoluta no fundo. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$ e $p_{atm} = 10^5$ Pa.

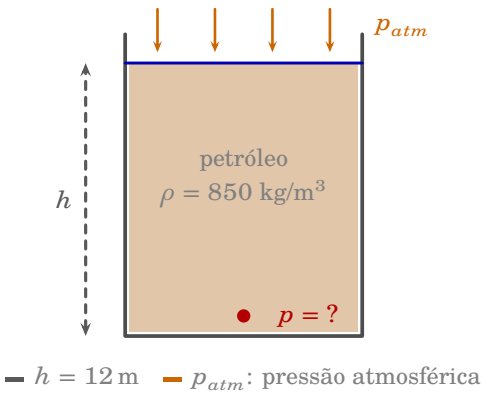


Figura 5.1

1 Compreender

O assunto é a diferença entre as duas leituras de **pressão** no mesmo ponto: a manométrica conta apenas o peso da coluna de líquido, e a absoluta acrescenta a atmosfera que empurra a superfície livre por cima.

Objetivo. Obter a pressão manométrica e a pressão absoluta no fundo do tanque. O que está em jogo é saber qual das duas um instrumento indica e qual a questão pede; a parcela da atmosfera é o que separa uma resposta da outra.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.5) e diga o que cada símbolo significa. Repare na figura: as setas sobre a superfície são a atmosfera, o p_0 dessa equação.

2 Organizar

Dados $\rho = 850\,\text{kg/m}^3$
$h = 12\,\text{m}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$
$p_{atm} = 10^5$ Pa.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI; o resultado pode ser dado em kPa.

Estratégia use a Equação (5.6) para a manométrica e some p_{atm} para chegar à absoluta.

3 **Resolver**

Pressão manométrica. Comece pela parcela da coluna de líquido:

$$\begin{aligned} p_{man} &= \rho g h \\ &= 850 \times 10 \times 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{man} = 102\,000\,\text{Pa} = 102\,\text{kPa}}$$

Pressão absoluta. Some a atmosfera que age sobre a superfície livre:

$$\begin{aligned} p_{abs} &= p_{atm} + p_{man} \\ &= 100\,000 + 102\,000 \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{abs} = 202\,000\,\text{Pa} = 202\,\text{kPa}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a coluna de 12 m de óleo produz pouco mais de uma atmosfera, e o total no fundo fica em torno de 2 atm. Confira pela regra dos 10 m.c.a.: 10 m de água valem cerca de 1 atm, e 12 m de um líquido 15 % menos denso dão praticamente o mesmo. É por isso que, em tanques API 650, a chapa do anel inferior é mais espessa que a dos anéis de cima. **Cuidado com a pegadinha:** o manômetro instalado no fundo indicaria 102 kPa, não 202 kPa. Quem responde sem somar a atmosfera dá a manométrica quando a questão pediu a absoluta.

EXEMPLO 5.4 • Vasos comunicantes com dois líquidos

Um tubo em U contém água ($\rho_a = 1\,000\,\text{kg/m}^3$) e óleo ($\rho_o = 800\,\text{kg/m}^3$), que não se misturam. Medida a partir da interface entre os dois, a coluna de óleo tem 20 cm de altura. Qual é a diferença de nível entre as duas superfícies livres?

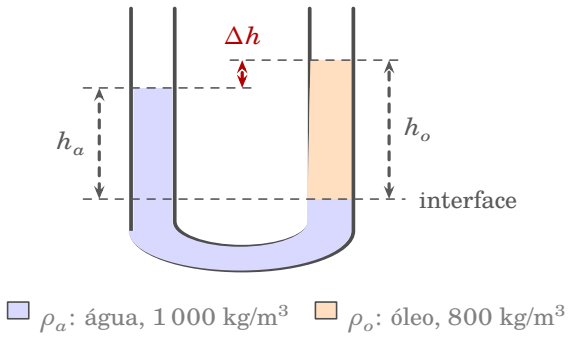


Figura 5.2

1 **Compreender**

O assunto é a consequência mais útil de **Stevin**: pontos à mesma altura, no mesmo fluido contínuo, têm a mesma pressão.

Objetivo. Obter a diferença de nível entre as duas superfícies livres. O que está em jogo é escolher o nível certo para igualar as pressões: a interface água-óleo, onde os dois pontos, um em cada ramo, estão no mesmo fluido.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.5) e diga o que cada símbolo significa. Em cada ramo a pressão no nível da interface vale a atmosfera mais a coluna do líquido que está por cima.

2 **Organizar**

Dados $\rho_a = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
$\rho_o = 800\,\text{kg/m}^3$
$h_o = 20\,\text{cm}$.

Conversões nenhuma: as alturas só aparecem em razão, e a resposta pode ficar em centímetros.

Estratégia iguale as pressões no nível da interface, tire h_a e subtraia as duas alturas.

3 **Resolver**

Igualdade de pressões na interface. Iguale as pressões dos dois pontos:

$$p_{atm} + \rho_a g h_a = p_{atm} + \rho_o g h_o$$

Altura da coluna de água. Os dois lados têm a parcela p_{atm} e o fator g, então divida os dois lados por g e subtraia p_{atm} de ambos:

$$\begin{aligned} \rho_a h_a &= \rho_o h_o \\ h_a &= \frac{\rho_o}{\rho_a} h_o \\ &= \frac{800}{1\,000} \times 20 = 16\,\text{cm} \end{aligned}$$

Diferença de nível. Subtraia as duas alturas medidas a partir da interface:

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_o - h_a \\ &= 20 - 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta h = 4\,\text{cm}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o líquido menos denso precisa de uma coluna mais alta para produzir a mesma pressão, então o óleo tem de ficar por cima, e ficou 4 cm acima da água. O resultado geral é $\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$: as alturas são inversamente proporcionais às densidades. Guarde essa razão, porque ela transforma medida de altura em medida de densidade. É esse o princípio do manômetro diferencial usado para localizar a interface água-óleo dentro dos separadores de produção, onde não se pode ver o que está acontecendo por dentro do vaso.

> **EXEMPLO 5.5** • Leitura de um manômetro de coluna
>
> Um manômetro de mercúrio ($\rho_{Hg} = 13\,600\,\text{kg/m}^3$) apresenta diferença de nível de 38 cm entre os dois ramos. Qual é a pressão manométrica do gás conectado a ele? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto é a **pressão manométrica** lida num manômetro de tubo aberto: um ramo recebe o gás e o outro fica exposto à atmosfera.

Objetivo. Obter a pressão manométrica que corresponde a 38 cm de mercúrio. O que está em jogo é perceber que a pressão atmosférica não precisa aparecer na conta: ela age nos dois ramos e já está descontada no próprio desnível.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.4) e diga o que cada símbolo significa. O desnível entre as duas colunas é o Δh dela.

2 Organizar

Dados $\rho_{Hg} = 13\,600\,\text{kg/m}^3$
$\Delta h = 38\,\text{cm}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões $\Delta h = 38\,\text{cm} = 0{,}38\,\text{m}$.

Estratégia aplique a Equação (5.4).

3 Resolver

Stevin no desnível. Aplique a equação ao desnível de mercúrio:

$$\begin{aligned} p_{man} &= \rho_{Hg}\, g\, \Delta h \\ &= 13\,600 \times 10 \times 0{,}38 \end{aligned}$$

$$\boxed{p_{man} = 51\,680\,\text{Pa} \approx 51{,}7\,\text{kPa}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: 51,7 kPa é cerca de meia atmosfera, e 38 cm de mercúrio é metade dos 76 cm que equivalem a uma atmosfera. Os dois caminhos concordam. O mercúrio é usado justamente por ser denso: para a mesma pressão, a coluna de mercúrio fica 13,6 vezes mais curta que a de água, e um manômetro de água para meia atmosfera precisaria de mais de 5 m de tubo.

DICA

1 atm = 760 mmHg. Se o desnível vier em milímetros de mercúrio, você resolve por proporção, sem calcular $\rho g h$: 380 mmHg são 0,5 atm, ou cerca de 50 kPa.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2018

Um tanque aberto é preenchido com um óleo de densidade $800\,\text{kg/m}^3$. Em uma determinada estocagem, a pressão no fundo do tanque é igual a $3 \times 10^5\,\text{N/m}^2$.

Dados: pressão atmosférica = $10^5\,\text{N/m}^2$; aceleração da gravidade = $10\,\text{m/s}^2$.

A altura do volume de óleo que preenche o tanque nessa estocagem, em metros, é igual a

(A) 12,5
(B) 19,0
(C) 25,0
(D) 37,5
(E) 50,0

P5B6MB

5.3 Princípio de Pascal

Stevin descreve a pressão que o próprio fluido gera pelo seu peso. Pascal descreve o que acontece quando você acrescenta pressão de fora.

DEFINIÇÃO 5.6 • Princípio de Pascal

Um acréscimo de pressão aplicado a um ponto de um líquido em equilíbrio transmite-se **integralmente** a todos os demais pontos do líquido e às paredes do recipiente. A palavra que carrega o princípio é integralmente: o acréscimo não se dilui pelo caminho nem diminui com a distância. É essa propriedade que permite acionar um macaco pesado com a força de uma alavanca de mão.

DEFINIÇÃO 5.7 • Prensa Hidráulica

A **prensa hidráulica** é a aplicação direta do princípio. Dois êmbolos de áreas diferentes fecham o mesmo líquido, e a pressão que o êmbolo pequeno aplica reaparece inteira sob o êmbolo grande. Como a área lá é maior, a força lá também é, na mesma proporção.

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \tag{5.7}$$

F_1: força aplicada no êmbolo menor (N)
A_1: área do êmbolo menor (m^2)
F_2: força obtida no êmbolo maior (N)
A_2: área do êmbolo maior (m^2)

Isolando a força obtida, você escreve $F_2 = F_1 \cdot (A_2/A_1)$, que é a forma em que a prensa costuma ser cobrada. A razão A_2/A_1 é a **vantagem mecânica** da prensa. Ela multiplica a força, mas não cria energia: o líquido que sai de baixo de um êmbolo é o mesmo que chega sob o outro, e o volume deslocado é igual dos dois lados.

$$A_1 x_1 = A_2 x_2 \tag{5.8}$$

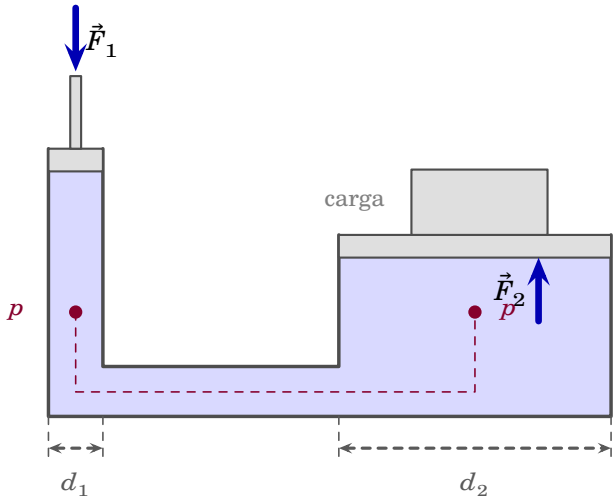
x_1: deslocamento do êmbolo menor (m)
x_2: deslocamento do êmbolo maior (m)

Junte as duas relações e você obtém $F_1 x_1 = F_2 x_2$: o trabalho que entra pelo êmbolo pequeno é o mesmo que sai pelo grande. O que a prensa multiplica é a força, nunca a energia.

O Princípio de Pascal está por trás de praticamente todo acionamento de força na indústria de petróleo: preventores de erupção (BOP), guinchos e chaves hidráulicas de perfuração, sistemas de ancoragem de plataformas, elevadores de manutenção e freios de veículos. Em todos eles o operador aplica pouca força numa área pequena e a máquina devolve muita força numa área grande, ao custo de um deslocamento maior no lado do operador.

EXEMPLO 5.6 • Prensa hidráulica

Uma prensa hidráulica tem êmbolos com diâmetros de 4 cm e 20 cm. Que força deve ser aplicada no êmbolo menor para sustentar uma carga de 5 000 N apoiada no êmbolo maior?



$\vec{F}_1$: força aplicada $\vec{F}_2$: força sobre a carga

p: mesma pressão nos dois pontos

diâmetros em escala (1:5); setas de força sem escala

Figura 5.3

1 Compreender

O assunto é a **vantagem mecânica** de uma prensa: a pressão é a mesma nos dois êmbolos, e é isso que a linha tracejada da figura liga.

Objetivo. Obter a força no êmbolo pequeno que equilibra 5 000 N no grande. O que está em jogo é a razão de áreas, que sai da razão dos diâmetros elevada ao quadrado, porque a área de um círculo cresce com o quadrado do diâmetro.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.7) e diga o que cada símbolo significa. O que diferencia as forças é a área.

2 Organizar

Dados $d_1 = 4\,\text{cm}$
$d_2 = 20\,\text{cm}$
$F_2 = 5\,000\,\text{N}$.

Conversões nenhuma: os diâmetros só aparecem em razão, e a força já está em newtons.

Estratégia obtenha a razão das áreas pelo quadrado da razão dos diâmetros e leve à Equação (5.7).

3 Resolver

Razão das áreas. Como as duas seções são circulares, o fator π aparece nas duas e some na divisão:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$
$$= \left(\frac{20}{4}\right)^2 = 25$$

Igualdade de pressões. Isole F_1:

$$F_1 = F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$
$$= \frac{5\,000}{25}$$

$$\boxed{F_1 = 200\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 200 N é o peso de um saco de cimento, e sustenta meia tonelada. A vantagem mecânica de 25 é o que explica o ganho. O preço aparece no deslocamento: pela Equação (5.8), para a carga subir 1 cm, o êmbolo pequeno precisa descer 25 cm. Confira a energia nos dois lados: $200 \times 0{,}25 = 50\,\text{J}$ e $5\,000 \times 0{,}01 = 50\,\text{J}$. A prensa multiplica força, nunca energia. **Cuidado com a pegadinha:** usar a razão dos diâmetros, 5, em vez da razão das áreas, 25, daria 1 000 N. Sempre que a seção for circular e o enunciado der diâmetro ou raio, eleve a razão ao quadrado.

EXEMPLO 5.7 • Elevador hidráulico

Um elevador hidráulico tem êmbolo menor de área $A_1 = 10\,\text{cm}^2$ e êmbolo maior de área $A_2 = 500\,\text{cm}^2$. Para elevar em 20 cm um corpo de 1 500 kg, determine a força necessária no êmbolo menor e o deslocamento desse êmbolo. Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

1 Compreender

O assunto são os dois lados de Pascal: a **igualdade de pressões** dá a relação entre as forças, e a **conservação do volume** do líquido incompressível dá a relação entre os deslocamentos.

Objetivo. Obter a força no êmbolo menor e quanto ele precisa descer. O que está em jogo é ver que a prensa multiplica a força e divide o deslocamento pelo mesmo fator, e que as áreas só aparecem em razão.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.7) e diga o que cada símbolo significa. A Equação (5.8) é a sua companheira, para os deslocamentos.

2 Organizar

Dados $A_1 = 10\,\text{cm}^2$
$A_2 = 500\,\text{cm}^2$
$m = 1\,500\,\text{kg}$
$x_2 = 20\,\text{cm}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: as áreas só aparecem em razão, e o deslocamento pode ficar em centímetros.

Estratégia calcule o peso da carga, aplique a Equação (5.7) para a força e a Equação (5.8) para o deslocamento.

3 Resolver

Peso da carga. É o que o êmbolo maior tem de sustentar:

$$\begin{aligned} F_2 &= mg \\ &= 1\,500 \times 10 = 15\,000\,\text{N} \end{aligned}$$

Força no êmbolo menor. Pela igualdade de pressões:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 \cdot \frac{A_1}{A_2} \\ &= 15\,000 \times \frac{10}{500} \end{aligned}$$

$$\boxed{F_1 = 300\,\text{N}}$$

Deslocamento do êmbolo menor. Pelo volume deslocado, que é o mesmo dos dois lados:

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &= A_2 x_2 \\ x_1 &= x_2 \cdot \frac{A_2}{A_1} \\ &= 20 \times \frac{500}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_1 = 1\,000\,\text{cm} = 10\,\text{m}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a razão de áreas é 50, então a força cai por 50 e o deslocamento sobe por 50. Os dois fatores se compensam, e o

trabalho é o mesmo nos dois lados: $W_1 = 300 \times 10 = 3\,000\,\text{J}$ e $W_2 = 15\,000 \times 0{,}20 = 3\,000\,\text{J}$. Perceba que os 10 m de curso não são um erro de conta, e sim o motivo pelo qual todo elevador hidráulico real usa uma bomba com válvula de retenção: o operador faz o curso em várias bombeadas curtas, e a válvula impede o líquido de voltar entre uma e outra.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2011

M846V4

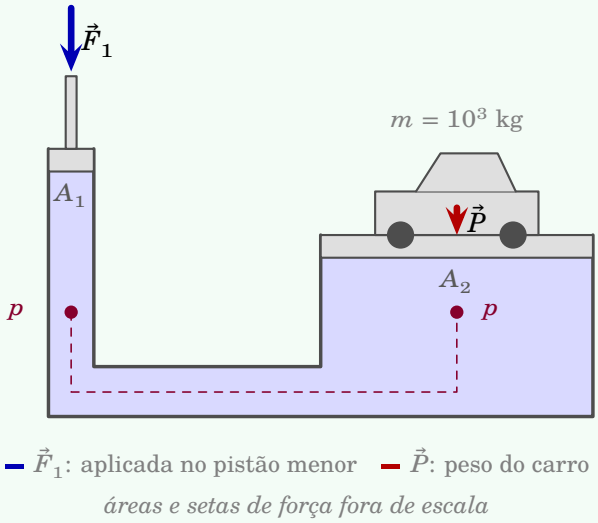


Figura 5.4

Em uma prensa hidráulica, conforme a figura acima, o pistão maior tem área de seção transversal 50 vezes maior que a área do pistão menor.
Para levantar um carro de 10^3 kg, qual deve ser a intensidade da força, em newtons, a ser exercida no pistão menor?

Dado: $g = 9{,}8\,\text{m/s}^2$.

(A) 196
(B) 19,6
(C) 1,96
(D) 0,196
(E) 0,0196

5.4 Empuxo e o Princípio de Arquimedes

Um corpo submerso pesa menos na balança do que pesa no ar. Ele não perdeu massa: ganhou uma força de baixo para cima, e essa força tem uma origem que você já conhece.

DEFINIÇÃO 5.8 • Princípio de Arquimedes

Todo corpo total ou parcialmente imerso num fluido recebe uma força vertical dirigida de baixo para cima, o **empuxo**, cujo módulo é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo. Perceba o que a definição diz e o que ela não diz: o empuxo depende do fluido e do volume submerso, e não depende do material nem do peso do corpo.

$$E = \rho_f V_{sub} g \tag{5.9}$$

E: empuxo, vertical e para cima (N)
ρ_f: densidade do fluido (kg/m^3)
V_{sub}: volume submerso, igual ao volume de fluido deslocado (m^3)
g: aceleração da gravidade (m/s^2)

NOTA

O empuxo é consequência de Stevin. A face de baixo do corpo está mais funda que a de cima, logo recebe pressão maior, e a diferença entre as duas pressões, multiplicada pela área, é uma força resultante para cima.

5.4.1 Condições de Flutuação

Um corpo largado dentro de um fluido está sujeito a duas forças verticais, o peso para baixo e o empuxo para cima. Comparar as duas equivale a comparar as densidades, porque o corpo e o fluido deslocado ocupam o mesmo volume.

Situação	Forças	Comportamento
$\rho_{corpo} < \rho_f$	$E > P$	sobe e flutua, com parte do volume fora do fluido
$\rho_{corpo} = \rho_f$	$E = P$	fica onde for solto, em equilíbrio indiferente
$\rho_{corpo} > \rho_f$	$E < P$	afunda até o fundo

Quando o corpo flutua em equilíbrio, ele afunda só o necessário para que o empuxo iguale o peso. Não há equação nova: escreva $E = P$ com a Equação (5.9) de um lado e $P = \rho_{corpo} V_{corpo} g$ do outro,

e divida os dois lados por $\rho_f V_{corpo} g$:

$$\rho_f V_{sub} g = \rho_{corpo} V_{corpo} g$$
$$\frac{V_{sub}}{V_{corpo}} = \frac{\rho_{corpo}}{\rho_f}$$

É a razão que a banca mais cobra: a fração submersa é a razão entre a densidade do corpo e a do fluido.

DICA

Leia essa razão nos dois sentidos. Se um corpo flutua com $3/4$ do volume submerso, a densidade dele é $3/4$ da densidade do fluido. E se você medir a fração submersa, já mediu a densidade do corpo.

EXEMPLO 5.8 • Peso aparente de um corpo submerso

Um corpo metálico de massa 500 kg e volume 0,3 m^3 é totalmente submerso na água do mar ($\rho = 1\,025$ kg/m^3). Qual é seu peso aparente? Use $g = 10$ m/s^2.

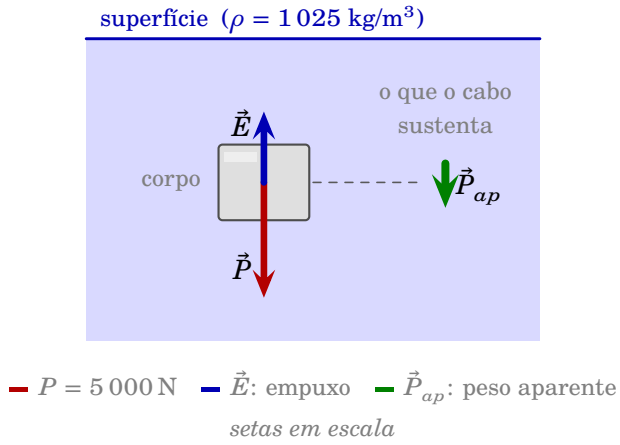


Figura 5.5

1 Compreender

O assunto é o **peso aparente**: a força que o cabo ou a balança precisa fazer para segurar o corpo dentro do fluido, ou seja, o que sobra do peso depois de descontado o empuxo.

Objetivo. Obter a força que um guindaste precisaria fazer para sustentar o corpo debaixo d'água. O que está em jogo é o volume que entra no empuxo: como o corpo está totalmente submerso, o volume deslocado é o volume inteiro do corpo, e não uma fração dele.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.9) e diga o que cada símbolo significa. O peso real vem da Equação (3.7), do cap. 3.

2 Organizar

Dados

$m = 500$ kg
$V = 0{,}3$ m^3
$\rho_{mar} = 1\,025$ kg/m^3
$g = 10$ m/s^2.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia calcule o peso real, calcule o empuxo pela Equação (5.9) com $V_{sub} = V$, e subtraia um do outro.

3 Resolver

Peso real. Calcule-o:

$$\begin{aligned} P &= mg \\ &= 500 \times 10 = 5\,000\,\text{N} \end{aligned}$$

Empuxo. Use o volume total, porque o corpo está inteiramente submerso:

$$\begin{aligned} E &= \rho_{mar} V g \\ &= 1\,025 \times 0{,}3 \times 10 = 3\,075\,\text{N} \end{aligned}$$

Peso aparente. Subtraia o empuxo do peso:

$$\begin{aligned} P_{ap} &= P - E \\ &= 5\,000 - 3\,075 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_{ap} = 1\,925\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o peso aparente é positivo, o que confere com um corpo metálico, mais denso que a água, que de fato afunda. Ele corresponde a uma massa aparente de 192,5 kg, menos de 40 % da real. É esse alívio que permite a um mergulhador movimentar debaixo d'água peças que não levantaria na superfície, e é sobre o peso aparente, não o real, que se dimensiona o cabo de içamento. Veículos submarinos não tripulados são projetados com empuxo praticamente igual ao peso, para que fiquem em equilíbrio indiferente e os propulsores só precisem corrigir pequenos desvios.

EXEMPLO 5.9 • Calado de uma barcaça

Uma barcaça retangular de 20 m por 8 m de base tem massa total de 640 toneladas quando carregada. Qual é o calado, isto é, a profundidade da parte submersa? Use $\rho_{\text{água}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$ e $g = 10\,\text{m/s}^2$.

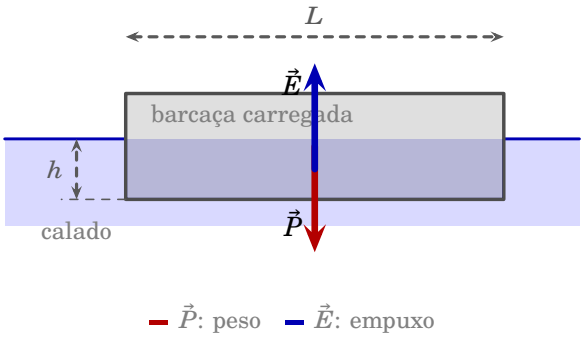


Figura 5.6

1 Compreender

O assunto é a **flutuação em equilíbrio**: a barcaça flutua, então o empuxo equilibra o peso, e é essa igualdade que determina até onde o casco afunda.

Objetivo. Obter o calado, a altura de casco que fica abaixo da linha d'água. O que está em jogo é escrever o volume submerso em função do calado: como o fundo é plano, ele é a área da base multiplicada pelo calado.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.9) e diga o que cada símbolo significa. Repare na figura: as duas setas têm o mesmo comprimento de propósito.

2 Organizar

Dados base de 20 m por 8 m
$m = 640\,\text{t}$
$\rho_{\text{água}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões $m = 640\,\text{t} = 640\,000\,\text{kg}$.

Estratégia escreva $E = P$ com $V_{sub} = A\,h$ e isole h.

3 Resolver

Área da base. Calcule-a:

$$A = 20 \times 8 = 160\,\text{m}^2$$

Condição de flutuação. Escreva $E = P$ com o volume submerso na forma $A\,h$:

$$\rho_{\text{água}}\, A\, h\, g = m\, g$$

Calado. Os dois lados têm o fator g. Divida os dois lados por g e depois por $\rho_{\text{água}}\, A$:

$$\begin{aligned} h &= \frac{m}{\rho_{\text{água}}\, A} \\ &= \frac{640\,000}{1\,000 \times 160} \end{aligned}$$

$$\boxed{h = 4\,\text{m}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 4 m de calado é compatível com uma barcaça de suprimento, e a gravidade desapareceu da resposta, como tinha de acontecer, porque ela aparecia dos dois lados da igualdade. Guarde a forma $h = m/(\rho A)$: para todo casco de fundo plano, o calado é proporcional à carga. A distância que sobra entre a linha d'água e o convés é a borda livre, em inglês *freeboard*, e é ela, não o calado, que limita quanto ainda se pode carregar antes de o mar embarcar. Em operações offshore o calado é acompanhado continuamente, porque ele é a leitura mais direta de quanta carga está a bordo.

> **EXEMPLO 5.10** • Fração emersa de um iceberg
>
> Um iceberg flutua na água do mar. Calcule a porcentagem do volume que fica acima da superfície. Use $\rho_{gelo} = 920\,\text{kg/m}^3$ e $\rho_{mar} = 1\,025\,\text{kg/m}^3$.

1 Compreender

O assunto é a **fração submersa** de um corpo que flutua, que é a razão entre as densidades.

Objetivo. Obter a porcentagem do iceberg que fica acima da superfície. O que está em jogo é ler o que o enunciado pede: a fração emersa, a parte que fica de fora, é o que falta para completar 100 %.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.9) e diga o que cada símbolo significa. Igualada ao peso, ela dá a razão $V_{sub}/V = \rho_{corpo}/\rho_f$ deduzida no texto.

2 **Organizar**

Dados $\rho_{gelo} = 920\,\text{kg/m}^3$
$\rho_{mar} = 1\,025\,\text{kg/m}^3$.

Conversões nenhuma: as densidades só aparecem em razão.

Estratégia escreva $E = P$, obtenha a fração submersa como razão das densidades e subtraia de 1.

3 **Resolver**

Fração submersa. Pela razão das densidades:

$$\frac{V_{sub}}{V} = \frac{\rho_{gelo}}{\rho_{mar}} = \frac{920}{1\,025} \approx 0{,}898$$

Fração emersa. Subtraia de 1:

$$\frac{V_{em}}{V} = 1 - 0{,}898 = 0{,}102$$

$$\boxed{\frac{V_{em}}{V} \approx 10\,\%}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: como as duas densidades são próximas, quase todo o volume tem de ficar submerso, e 10 % visíveis é um número pequeno, coerente com a expressão “ponta do iceberg”. Perceba que o resultado depende só da razão entre as densidades, e não do tamanho do bloco: um cubo de gelo num copo de água salgada esconderia a mesma proporção. O mesmo raciocínio explica o projeto das plataformas semissubmersíveis, que mantêm a maior parte do volume dos flutuadores debaixo d’água para reduzir a área exposta às ondas e ganhar estabilidade.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2017

Em uma determinada pesquisa, é necessário levar à superfície uma caixa de 200 kg e $8{,}00 \times 10^{-2}\ \text{m}^3$ que se encontra no fundo do mar. Para facilitar a subida, amarra-se à caixa um balão inextensível totalmente cheio de ar. Dessa forma, o conjunto sobe com velocidade constante.

Dados: aceleração da gravidade = $10{,}0\ \text{m/s}^2$; densidade da água do mar = $1{,}00 \times 10^3\ \text{kg/m}^3$.

Desprezando-se o peso do balão e do ar no seu interior, bem como a viscosidade do mar, o valor aproximado do volume do balão, em m^3, é

(A) $8{,}00 \times 10^{-2}$

(B) $12{,}0 \times 10^{-2}$

(C) $20{,}0 \times 10^{-2}$

(D) $28{,}0 \times 10^{-2}$

(E) $40{,}0 \times 10^{-2}$

VV3BPN

5.5 Vazão e Equação da Continuidade

Até aqui o fluido estava parado. A partir de agora ele escoa, e duas hipóteses simplificadoras tornam o problema tratável no nível deste livro.

A primeira é o **regime permanente**, também chamado de estacionário: em cada ponto da tubulação, a velocidade, a pressão e a densidade não mudam com o tempo. Isso não quer dizer que o fluido não acelere, e sim que quem passa depois encontra a mesma situação que quem passou antes. Uma bomba ligada há horas, com vazão constante, opera em regime permanente.

A segunda diz respeito ao modo como o fluido escoa. No **escoamento laminar**, as camadas do fluido deslizam em lâminas paralelas, sem se misturarem, e a velocidade em cada ponto é bem definida. No **escoamento turbulento**, aparecem redemoinhos e a trajetória de cada porção do fluido deixa de ser previsível. Todas as equações deste capítulo valem para escoamento laminar em regime permanente, e é assim que os enunciados de prova descrevem a situação.

DEFINIÇÃO 5.9 • Vazão Volumétrica

A **vazão volumétrica** é o volume de fluido que atravessa uma seção transversal da tubulação em cada unidade de tempo. Se o fluido avança com velocidade v por um tubo de área A, em um segundo passa pela seção uma coluna de comprimento v e área A, o que dá a segunda forma da fórmula.

$$Q = \frac{V}{\Delta t} = A\,v \tag{5.10}$$

Q: vazão volumétrica (m^3/s)
V: volume escoado (m^3)
Δt: intervalo de tempo (s)
A: área da seção transversal (m^2)
v: velocidade média do escoamento (m/s)

DEFINIÇÃO 5.10 • Vazão Mássica

A **vazão mássica** é a massa de fluido que atravessa a seção em cada unidade de tempo. Ela é a vazão volumétrica multiplicada pela densidade, e é a grandeza que interessa quando se cobra por quantidade de produto, e não por volume.

$$\dot{m} = \rho\,Q = \rho\,A\,v \tag{5.11}$$

$\dot{m}$: vazão mássica (kg/s)
ρ: densidade do fluido (kg/m^3)
Q: vazão volumétrica (m^3/s)

DEFINIÇÃO 5.11 • Equação da Continuidade

Para um fluido **incompressível** em regime permanente, tudo o que entra por uma seção do tubo sai pela outra, porque o líquido não se acumula nem se comprime pelo caminho. Logo, a vazão é a mesma em qualquer seção, por mais que o diâmetro mude.

$$A_1\,v_1 = A_2\,v_2 \tag{5.12}$$

A_1, A_2: áreas das duas seções (m^2)
v_1, v_2: velocidades médias nas duas seções (m/s)

DICA

Em tubo circular, $A = \pi r^2$, e o fator π some quando você monta a razão entre duas seções. Sobra $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$: reduzir o diâmetro à metade quadruplica a velocidade.

EXEMPLO 5.11 • Vazão em uma tubulação

Uma tubulação de diâmetro interno 50 cm transporta um fluido a 2 m/s. Calcule a vazão volumétrica em m³/h e a vazão mássica, para $\rho = 850\,\text{kg/m}^3$. Use $\pi \approx 3{,}14$.

1 Compreender

O assunto são as **definições de vazão**: a volumétrica pede a área da seção, e a mássica é a volumétrica multiplicada pela densidade.

Objetivo. Obter quanto volume por hora e quanta massa por segundo passam pela tubulação. O que está em jogo é as unidades: a seção é circular e o enunciado dá o diâmetro em centímetros; e a resposta é pedida em metros cúbicos por hora, enquanto a fórmula entrega metros cúbicos por segundo.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.10) e diga o que cada símbolo significa. A Equação (5.11) dá a vazão mássica a partir dela.

2 Organizar

Dados $d = 50\,\text{cm}$
$v = 2\,\text{m/s}$
$\rho = 850\,\text{kg/m}^3$
$\pi \approx 3{,}14$.

Conversões $d = 50\,\text{cm} = 0{,}5\,\text{m}$
$1\,\text{h} = 3\,600\,\text{s}$, para a resposta.

Estratégia calcule a área, aplique a Equação (5.10), converta para hora e depois use a Equação (5.11).

3 Resolver

Área da seção. Calcule o raio e a área:

$$r = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,\text{m}$$
$$A = \pi r^2$$
$$= 3{,}14 \times (0{,}25)^2 \approx 0{,}196\,\text{m}^2$$

Vazão volumétrica. Multiplique pela velocidade e converta os segundos em horas:

$$Q = A\,v$$
$$= 0{,}196 \times 2 = 0{,}393\,\text{m}^3/\text{s}$$
$$= 0{,}393 \times 3\,600$$

$$Q \approx 1\,414\,\mathrm{m^3/h}$$

Vazão mássica. Multiplique a vazão volumétrica em m³/s pela densidade:

$$\begin{aligned}\dot{m} &= \rho\, Q \\ &= 850 \times 0{,}393\end{aligned}$$

$$\dot{m} \approx 334\,\mathrm{kg/s}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelas unidades: $\mathrm{m^2} \times \mathrm{m/s}$ dá m³/s, e $\mathrm{kg/m^3} \times \mathrm{m^3/s}$ dá kg/s. Em ordem de grandeza, $1\,400\,\mathrm{m^3/h}$ num duto de meio metro é o porte de um oleoduto de transferência entre terminal e refinaria, como os da Transpetro. A vazão mássica é a grandeza dos contratos e dos balanços de produção, porque o volume do petróleo muda com a temperatura e a massa não. **Cuidado com a pegadinha:** usar a vazão já em m³/h no cálculo da vazão mássica daria um número 3 600 vezes maior. Multiplique a densidade pela vazão em m³/s e converta o tempo só no resultado.

EXEMPLO 5.12 • Estrangulamento em tubulação

Uma tubulação horizontal passa de $d_1 = 20\,\mathrm{cm}$ para $d_2 = 10\,\mathrm{cm}$. Se a velocidade na seção larga é 3 m/s, qual é a velocidade na seção estreita?

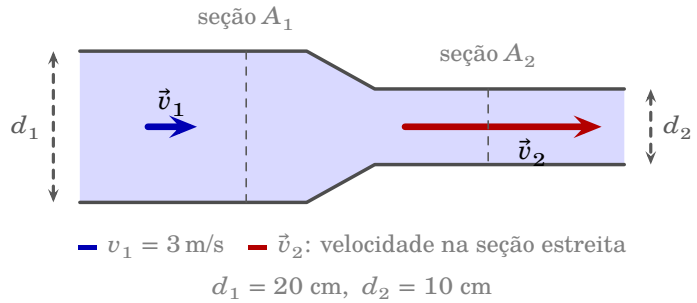


Figura 5.7

1 Compreender

O assunto é a **Equação da Continuidade**: a mesma vazão tem de passar pelas duas seções, então onde a área diminui a velocidade precisa aumentar.

Objetivo. Obter a velocidade do fluido no trecho estreito. O que está

em jogo é a razão entre as áreas, que é a razão entre os diâmetros elevada ao quadrado, porque as seções são circulares.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.12) e diga o que cada símbolo significa. Com seções circulares, o π some na razão.

2 Organizar

Dados $d_1 = 20\,\text{cm}$
$d_2 = 10\,\text{cm}$
$v_1 = 3\,\text{m/s}$.

Conversões nenhuma: os diâmetros só aparecem em razão.

Estratégia aplique a Equação (5.12) na forma da razão dos diâmetros ao quadrado.

3 Resolver

Continuidade. Troque a razão de áreas pela razão dos diâmetros ao quadrado:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_1 \cdot \frac{A_1}{A_2} = v_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \\ &= 3 \times \left(\frac{20}{10}\right)^2 \\ &= 3 \times 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_2 = 12\,\text{m/s}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a velocidade tinha de aumentar, porque a área diminuiu, e aumentou pelo fator certo. Perceba que reduzir o diâmetro pela metade quadruplicou a velocidade, e não a dobrou. Essa é a leitura contraintuitiva que a banca explora. O resultado tem consequência prática direta: trechos estreitos escoam mais rápido, sofrem mais erosão interna e, como você verá na Seção 5.6, operam com pressão menor que os trechos largos. **Cuidado com a pegadinha:** responder 6 m/s é usar a razão dos diâmetros, 2, em vez da razão das áreas, 4. Sempre que a seção for circular, o fator é o quadrado.

CUIDADO

A velocidade varia com o inverso do **quadrado** do diâmetro, $v \propto 1/d^2$, e não linearmente. É o erro mais comum do capítulo.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Um fluido é transportado por uma tubulação cuja área da seção transversal é de $2{,}0\,\mathrm{m}^2$. A velocidade média do fluido através da tubulação é de $10\,\mathrm{m/s}$. Qual é, em m^3/s, a vazão desse escoamento?

(A) 2,0
(B) 20
(C) 100
(D) 200
(E) 1 000

MXQNM5

5.6 Equação de Bernoulli

A Continuidade diz como a velocidade muda quando o tubo muda de diâmetro. Ela não diz nada sobre a pressão. Quem faz essa ligação é Bernoulli, aplicando ao fluido a conservação de energia que você usou no cap. 4.

DEFINIÇÃO 5.12 • Equação de Bernoulli

Para um **fluido ideal**, isto é, incompressível e sem viscosidade, em regime permanente, a soma da pressão com a energia cinética e com a energia potencial gravitacional, todas por unidade de volume, é constante ao longo de uma **linha de corrente**. Perceba que a soma é constante, mas as parcelas não: uma cresce à custa das outras.

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{constante} \tag{5.13}$$

p: pressão no ponto (Pa)
ρ: densidade do fluido ($\mathrm{kg/m}^3$)
v: velocidade do escoamento no ponto (m/s)
h: altura do ponto em relação a um nível de referência (m)

Aplicando a dois pontos da mesma linha de corrente, você obtém a forma que resolve as questões de prova:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{5.14}$$

p_1, p_2: pressões nos dois pontos (Pa)
v_1, v_2: velocidades nos dois pontos (m/s)
h_1, h_2: alturas dos dois pontos (m)

NOTA

Leia os três termos como três formas de energia por unidade de volume:

- p, a energia associada à pressão;
- $^1/_2 \rho v^2$, a energia cinética do fluido em movimento;
- $\rho g h$, a energia potencial gravitacional.

Num tubo horizontal, $h_1 = h_2$ e o terceiro termo é igual dos dois lados, então sobra a troca entre pressão e velocidade. Onde o fluido acelera, a pressão cai. Esse é o **efeito Venturi**, e é sobre ele que funcionam os medidores de vazão por placa de orifício e por tubo de Venturi instalados em linhas de processo: mede-se a queda de pressão no estrangulamento e dela se calcula a vazão.

O **tubo de Pitot** usa a mesma equação no sentido inverso, para medir velocidade. Ele tem duas tomadas: uma alinhada com o escoamento, onde o fluido é freado até parar e a pressão registrada é a de estagnação, e outra lateral, que registra a pressão estática. A diferença entre as duas é justamente o termo cinético,

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

de onde se tira $v = \sqrt{2\,\Delta p / \rho}$. É assim que um avião mede a própria velocidade em relação ao ar, e é assim que se levanta o perfil de velocidades dentro de um duto de grande diâmetro.

NOTA

Com o fluido em repouso, $v = 0$ nos dois pontos, e a Equação (5.14) se reduz a $\Delta p = \rho g \, \Delta h$, que é o Teorema de Stevin. Bernoulli contém Stevin como caso particular.

EXEMPLO 5.13 • Efeito Venturi em uma tubulação

Água escoa horizontalmente por uma tubulação. Na seção larga ($d_1 = 10\,\text{cm}$), a pressão é 200 kPa e a velocidade é 2 m/s. Qual é a pressão na seção estreita ($d_2 = 5\,\text{cm}$)? Use $\rho_{\text{água}} = 1\,000\,\text{kg/m}^3$.

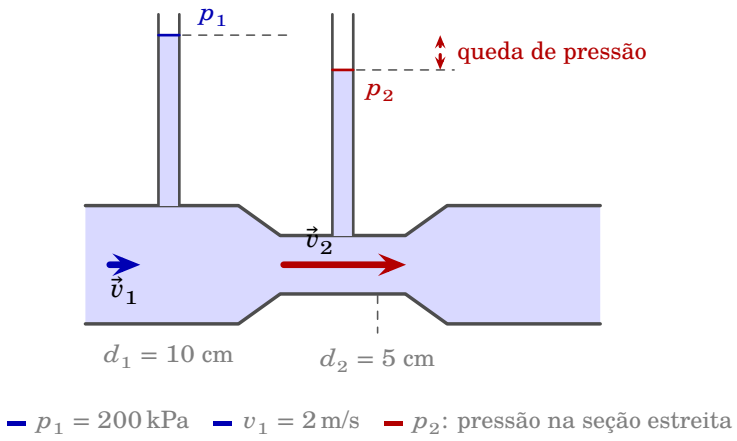


Figura 5.8

1 Compreender

O assunto são as duas equações do escoamento, nesta ordem: a **Continuidade**, que dá a velocidade na seção estreita a partir dos diâmetros, e **Bernoulli**, que converte a variação de velocidade em variação de pressão.

Objetivo. Obter a pressão na seção estreita. O que está em jogo é o sinal da variação: onde o fluido acelera a pressão cai, e o tubo horizontal elimina o termo da altura.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.14) e diga o que cada símbolo significa. Com $h_1 = h_2$, o termo $\rho g h$ é o mesmo dos dois lados. Repare nos tubos verticais da figura: a altura da coluna é a pressão, e a do estrangulamento já está mais baixa.

2 Organizar

Dados $d_1 = 10\,\text{cm}$
$d_2 = 5\,\text{cm}$
$p_1 = 200\,\text{kPa}$
$v_1 = 2\,\text{m/s}$
$\rho = 1\,000\,\text{kg/m}^3$
tubo horizontal.

Conversões $p_1 = 200\,\text{kPa} = 200\,000\,\text{Pa}$.

Estratégia calcule v_2 pela Equação (5.12) e leve a Equação (5.14) com $h_1 = h_2$.

3 **Resolver**

Velocidade na seção estreita. Pela Continuidade, com a razão dos diâmetros ao quadrado:

$$v_2 = v_1 \cdot \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$
$$= 2 \times \left(\frac{10}{5}\right)^2 = 8\,\text{m/s}$$

Bernoulli entre as duas seções. Como o tubo é horizontal, o termo $\rho g h$ é igual dos dois lados e some da equação:

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\,(v_1^2 - v_2^2)$$
$$= 200\,000 + \frac{1}{2} \times 1\,000 \times (4 - 64)$$
$$= 200\,000 + 500 \times (-60)$$
$$= 200\,000 - 30\,000$$

$$\boxed{p_2 = 170\,000\,\text{Pa} = 170\,\text{kPa}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a pressão caiu, como tinha de cair, porque o fluido acelerou. A queda de 30 kPa é exatamente o aumento da energia cinética por unidade de volume, de 2 kJ/m^3 para 32 kJ/m^3: a energia muda de forma. Um tubo de Venturi industrial faz esse cálculo ao contrário: mede Δp entre os dois trechos e dele obtém a vazão, sem nenhuma peça móvel dentro da linha. **Cuidado com a pegadinha:** o sinal. Como $v_2 > v_1$, o termo $(v_1^2 - v_2^2)$ é negativo, e p_2 tem de sair menor que p_1. Pressão maior no estrangulamento é ordem invertida dentro do parêntese.

EXEMPLO 5.14 • Teorema de Torricelli

Um tanque aberto contém água até 5 m de altura. Abre-se um pequeno orifício na base. Com que velocidade a água sai? Use $g = 10\,\text{m/s}^2$.

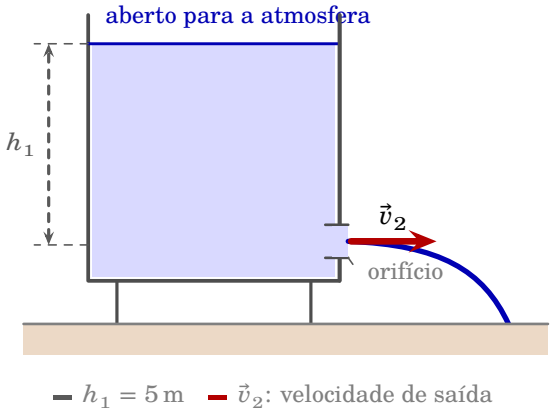


Figura 5.9

1 Compreender

O assunto é **Bernoulli** entre dois pontos: a superfície livre, ponto 1, e o orifício, ponto 2.

Objetivo. Obter a velocidade com que o jato deixa o orifício. O que está em jogo é as duas simplificações que o enunciado autoriza: tanque aberto e jato na atmosfera dão $p_1 = p_2 = p_{atm}$, e orifício pequeno diante da seção do tanque faz o nível descer devagar, com v_1 desprezível perto de v_2.

Antes de seguir, escreva a Equação (5.14) e diga o que cada símbolo significa. Com essas duas simplificações sobram só a altura de um lado e a velocidade do outro.

2 Organizar

Dados $h_1 = 5\,\text{m}$ na superfície
$h_2 = 0$ no orifício
$v_1 \approx 0$
$p_1 = p_2 = p_{atm}$
$g = 10\,\text{m/s}^2$.

Conversões nenhuma: tudo já está no SI.

Estratégia escreva a Equação (5.14) entre os dois pontos, elimine os termos iguais e isole v_2.

3 **Resolver**

Bernoulli entre superfície e orifício. Escreva-a:

$$p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

Simplificações e velocidade. Os dois lados têm a parcela p_{atm}, então subtraia-a de ambos; depois divida os dois lados por ρ. Com $v_1 \approx 0$ e $h_2 = 0$, resta:

$$\begin{aligned} g h_1 &= \frac{1}{2} v_2^2 \\ v_2 &= \sqrt{2 g h_1} \\ &= \sqrt{2 \times 10 \times 5} \\ &= \sqrt{100} \end{aligned}$$

$$v_2 = 10\,\text{m/s}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: $v = \sqrt{2gh}$ é a mesma expressão da velocidade de um corpo que cai livremente de uma altura h, que você deduziu no cap. 4 por conservação de energia. Não é coincidência: nos dois casos a energia potencial de uma altura h está sendo convertida integralmente em energia cinética. Esse resultado é o **Teorema de Torricelli**. Perceba que a velocidade não depende da densidade do líquido: água e óleo sairiam com a mesma velocidade pelo mesmo furo, à mesma altura de coluna. Em tanques de armazenamento, é esse cálculo que estima a taxa de vazamento por um furo no costado e o tempo disponível para conter um derramamento.

DICA

$v = \sqrt{2gh}$ aparece na queda livre (cap. 4) e em Torricelli. Nos dois casos é conservação de energia, e nos dois casos a massa e a densidade não entram na resposta.

22QJ8P

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação (Dutos e Terminais), 2023

O recipiente cilíndrico de diâmetro igual a 12 m, representado na figura, é aberto no topo e contém água, cuja densidade é igual a $1\,000\,\text{kg/m}^3$, até a linha indicada. O nível da água no interior do reservatório está a uma altura $h_1 = 10{,}8\,\text{m}$, e a tubulação de saída, um duto circular com $20\,\text{cm}^2$ de área de seção reta, está a uma altura $h_2 = 9\,\text{m}$.

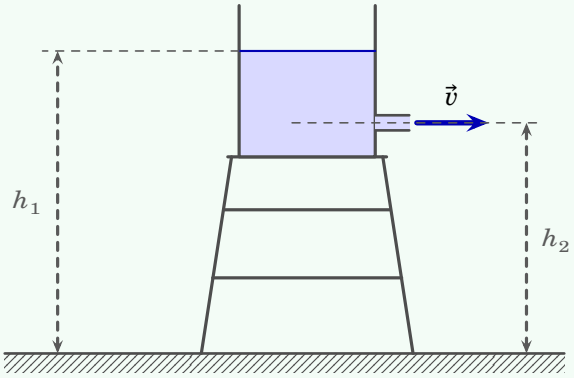


Figura 5.10

Considerando-se a situação apresentada, a vazão de saída de água, em kg/s, é igual a

Dado: $g = 10\,\text{m/s}^2$

(A) 0,012

(B) 0,12

(C) 1,2

(D) 12

(E) 120

PARTE II

Física Térmica

CAPÍTULO

6

Termologia

Parece-me extremamente difícil, senão impossível, formar uma ideia distinta de qualquer coisa capaz de ser excitada e comunicada do modo como o calor foi excitado e comunicado nestes experimentos, a não ser o MOVIMENTO.

CONDE RUMFORD

No arsenal de Munique, em 1798, uma broca perfura o bronze de um canhão, a água em volta ferve e o calor não acaba enquanto o atrito continuar. Rumford passou horas olhando aquilo e contou o que viu num artigo para a Royal Society de Londres, "Investigação experimental sobre a fonte do calor que o atrito excita" (*An Experimental Enquiry Concerning the Source of the Heat which is Excited by Friction*), publicado nas *Philosophical Transactions* daquele ano, e a frase da epígrafe é a conclusão dele. Se o calor fosse uma substância guardada no metal, teria se esgotado. A conclusão, de que o calor é movimento, é o ponto de partida das duas ideias que organizam este capítulo.

A **Termologia** é o ramo da Física que estuda os fenômenos térmicos: temperatura, dilatação, calor, mudanças de fase e propagação de calor. Ela se apoia em duas ideias que você vai usar o capítulo inteiro. A primeira é que temperatura mede o grau de agitação das partículas de um corpo, e não a quantidade de energia que ele guarda. A segunda é que calor não é uma propriedade que o corpo tem, e sim energia em trânsito: existe enquanto houver diferença de temperatura, e acaba quando o equilíbrio térmico se estabelece. Separar essas duas coisas

resolve boa parte das questões conceituais da banca.

Na indústria de petróleo e gás, o controle térmico decide projeto e operação. Uma refinaria trabalha de $-160\,^{\circ}\mathrm{C}$, no armazenamento de gás natural liquefeito, a mais de $500\,^{\circ}\mathrm{C}$, nos fornos de craqueamento. A dilatação de oleodutos e tubulações é absorvida por juntas de expansão, curvas em "S" e suportes deslizantes, porque uma linha impedida de dilatar acumula tensão até romper. Tanques de armazenamento nunca são cheios até a borda, pelo mesmo motivo. E trocadores de calor, presentes em quase toda unidade de processo, existem para transferir energia entre correntes de forma controlada, o que é calorimetria aplicada.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Converter temperaturas entre as escalas Celsius, Fahrenheit e Kelvin, e distinguir conversão de valor de conversão de variação;
- Relacionar duas escalas termométricas quaisquer a partir dos seus pontos fixos;
- Calcular a dilatação linear, superficial e volumétrica de sólidos;
- Prever o que acontece com furos, orifícios e cavidades quando a peça é aquecida;
- Determinar a dilatação aparente de um líquido dentro de um recipiente que também dilata;
- Calcular calor sensível, capacidade térmica e potência térmica em correntes de processo;
- Resolver problemas de equilíbrio térmico pelo princípio $\sum Q = 0$, com e sem mudança de fase;
- Calcular o calor latente de fusão e de vaporização e ler a curva de aquecimento de uma substância;
- Identificar condução, convecção e radiação e aplicar a Lei de Fourier e a Lei de Stefan-Boltzmann.

6.1 Temperatura e Escalas Termométricas

A **temperatura** é a grandeza que mede o grau médio de agitação das partículas de um corpo. Dois corpos em **equilíbrio térmico** têm a mesma temperatura e param de trocar calor entre si. Um termômetro só funciona por causa disso: ele entra em equilíbrio com o corpo e passa a indicar a temperatura dele.

DEFINIÇÃO 6.1 • Lei Zero da Termodinâmica

Se um corpo A está em equilíbrio térmico com um corpo C, e um corpo B também está em equilíbrio térmico com C, então A e B estão em equilíbrio térmico entre si. Esse princípio é o que autoriza usar um terceiro corpo, o termômetro, para comparar a temperatura de dois outros.

6.1.1 As três escalas usuais

DEFINIÇÃO 6.2 • Conversão entre Celsius, Fahrenheit e Kelvin

As três escalas usam os mesmos dois **pontos fixos**, a fusão do gelo e a ebulição da água sob 1 atm, e por isso se relacionam por uma única igualdade.

$$\frac{T_C}{5} = \frac{T_F - 32}{9} = \frac{T_K - 273}{5} \tag{6.1}$$

T_C: temperatura na escala Celsius (°C)
T_F: temperatura na escala Fahrenheit (°F)
T_K: temperatura na escala Kelvin (K)

Na prática, guarde as duas formas diretas que saem dessa igualdade:

$$T_K = T_C + 273 \qquad \text{e} \qquad T_F = 1{,}8\,T_C + 32$$

NOTA

Características das três escalas:

- **Celsius:** o gelo funde a 0 °C e a água ferve a 100 °C, sob 1 atm;
- **Fahrenheit:** usada nos Estados Unidos e em muitos instrumentos importados; o gelo funde a 32 °F e a água ferve a 212 °F;
- **Kelvin:** escala absoluta do SI; o zero absoluto é 0 K = −273 °C, e não existe temperatura negativa nessa escala.

EXEMPLO 6.1 • Conversão entre escalas

Um termômetro de precisão instalado na saída de um forno marca 752 °F. Determine essa temperatura nas escalas Celsius e Kelvin.

NOTA

Uma *variação* de temperatura em Celsius e em Kelvin tem o mesmo valor numérico: $\Delta T_C = \Delta T_K$. Isso vale porque as duas escalas têm a mesma divisão e diferem só na origem. Em Fahrenheit não vale, porque a divisão é outra: $\Delta T_F = 1{,}8\,\Delta T_C$.

1 Compreender

O assunto é a **conversão de um valor de temperatura** entre as três escalas.

Objetivo. Obter quanto marcariam, no mesmo ponto do forno, um termômetro graduado em Celsius e outro em Kelvin. O que está em jogo é a ordem: o caminho mais seguro não é ir de Fahrenheit para Kelvin de uma vez, e sim passar por Celsius, que é a escala do meio na igualdade, e só então somar 273.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.1) e diga o que cada símbolo significa. As duas formas diretas que saem dela estão logo abaixo da tabela de símbolos.

2 Organizar

Dados $T_F = 752\,^\circ\text{F}$.

Conversões nenhuma: a conversão é o próprio exercício.

Estratégia isole T_C na relação entre Celsius e Fahrenheit, calcule o valor e some 273 para chegar ao Kelvin.

3 Resolver

a) Fahrenheit para Celsius. Isole T_C:

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{T_F - 32}{1{,}8} \\ &= \frac{752 - 32}{1{,}8} \\ &= \frac{720}{1{,}8} \end{aligned}$$

$$\boxed{T_C = 400\,^\circ\text{C}}$$

b) Celsius para Kelvin. Some 273:

$$\begin{aligned} T_K &= T_C + 273 \\ &= 400 + 273 \end{aligned}$$

$$\boxed{T_K = 673\,\text{K}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $752\,^\circ\text{F}$ é muito acima da ebulição da água, $212\,^\circ\text{F}$, então o resultado em Celsius tinha de passar bem de $100\,^\circ\text{C}$. E o valor em Kelvin é sempre 273 unidades maior que o valor em Celsius, nunca menor. $400\,^\circ\text{C}$ é a ordem de grandeza de um forno de aquecimento

de carga numa unidade de destilação atmosférica. Na refinaria, os instrumentos de campo costumam indicar Celsius ou Fahrenheit, e a escala Kelvin fica reservada para as contas de termodinâmica, onde a temperatura absoluta é obrigatória.

EXEMPLO 6.2 • Temperatura em que Celsius e Fahrenheit coincidem

Existe uma temperatura em que um termômetro em Celsius e outro em Fahrenheit indicam o mesmo valor numérico. Determine essa temperatura.

1 Compreender

O assunto é a relação entre as escalas Celsius e Fahrenheit, mas o trabalho é de **álgebra**: uma relação entre duas escalas e uma condição imposta pelo enunciado.

Objetivo. Obter o número T que satisfaz a relação de conversão quando aparece dos dois lados. O que está em jogo é traduzir "indicam o mesmo valor" na condição $T_C = T_F$; como as escalas têm origens e divisões diferentes, só há um ponto assim.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.1) e diga o que cada símbolo significa. Só a parte entre Celsius e Fahrenheit entra.

2 Organizar

Dados a relação $\dfrac{T_C}{5} = \dfrac{T_F - 32}{9}$
a condição $T_C = T_F = T$.

Conversões nenhuma: a questão é algébrica.

Estratégia substitua T nos dois lugares, multiplique cruzado e resolva a equação do primeiro grau.

3 Resolver

Condição na relação de conversão. Substitua T nos dois lugares:

$$\frac{T}{5} = \frac{T - 32}{9}$$

Equação do primeiro grau. Multiplique cruzado para tirar as frações:

$$9T = 5(T - 32)$$
$$9T = 5T - 160$$

Solução. Passe $5T$ para o lado esquerdo e divida os dois lados por 4:

$$4T = -160$$
$$T = \frac{-160}{4}$$

$$\boxed{T = -40}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: $-40\,^\circ\text{C}$ corresponde mesmo a $-40\,^\circ\text{F}$, porque $1{,}8\times(-40) + 32 = -72 + 32 = -40$. Confere. Esse é um dos poucos números de Física que vale a pena decorar, e ele tem uso prático: -40 é o ponto em que qualquer instrumento graduado nas duas escalas mostra a mesma marca, o que serve de conferência rápida de calibração. A faixa não é exótica na indústria, já que o armazenamento de gás natural liquefeito trabalha bem abaixo disso.

> **EXEMPLO 6.3** • Variação de temperatura
>
> Um fluido de processo é aquecido de $25\,^\circ\text{C}$ para $85\,^\circ\text{C}$. Determine a variação de temperatura em Kelvin e em Fahrenheit.

1 Compreender

O assunto é a conversão de uma **variação** de temperatura, que segue outra regra, e não a conversão de um valor.

Objetivo. Obter de quantas unidades de cada escala foi o aquecimento. O que está em jogo é não usar o 32: Celsius e Kelvin têm divisões de mesmo tamanho, então a diferença tem o mesmo número nas duas, e em Fahrenheit cabem 1,8 graus em cada grau Celsius.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.1) e diga o que cada símbolo significa. Aplicada a dois valores e subtraída, ela deixa só os fatores de escala.

2 Organizar

Dados $T_i = 25\,^\circ\text{C}$
$T_f = 85\,^\circ\text{C}$.

Conversões nenhuma: a questão é a própria conversão da variação.

Estratégia calcule ΔT_C pela subtração, copie o valor para o Kelvin e multiplique por 1,8 para chegar ao Fahrenheit.

3 **Resolver**

Variação em Celsius. Subtraia:

$$\begin{aligned}\Delta T_C &= T_f - T_i \\ &= 85 - 25 = 60\,^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Variação em Kelvin. O valor é o mesmo, porque a divisão das duas escalas é igual:

$$\boxed{\Delta T_K = 60\,\text{K}}$$

Variação em Fahrenheit. Multiplique pelo fator de 1,8:

$$\begin{aligned}\Delta T_F &= 1{,}8 \times \Delta T_C \\ &= 1{,}8 \times 60\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta T_F = 108\,^\circ\text{F}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: a variação em Fahrenheit tem de ser o maior dos três números, porque a divisão dessa escala é a menor; e o valor em Kelvin tem de ser igual ao de Celsius. Perceba a diferença em relação ao Exemplo 6.1: lá o 32 entrava na conta, aqui não. Em trocador de calor, a eficiência é calculada com ΔT: trocar Celsius por Kelvin não muda nada; trocar por Fahrenheit sem o fator 1,8 erra o resultado em 80 %.

Cuidado com a pegadinha: converter 25 e 85 separadamente e depois subtrair também dá 108, porque o 32 se elimina. O que não funciona é converter a diferença com a fórmula do valor: 1,8×60+32 = 140 não é resposta de nada.

CUIDADO

Escreva sempre qual das duas coisas o enunciado pede. Para um valor, $T_F = 1{,}8\,T_C + 32$. Para uma variação, $\Delta T_F = 1{,}8\,\Delta T_C$, sem o 32, e $\Delta T_C = \Delta T_K$. Usar ΔT_F direto numa conta de calor sensível é um dos erros mais frequentes do capítulo.

6.1.2 Escalas termométricas arbitrárias

Nada obriga um termômetro a usar Celsius, Fahrenheit ou Kelvin. Qualquer escala fica definida assim que alguém escolhe dois **pontos fixos** e atribui um número a cada um deles. A banca gosta desse tipo de questão porque ela testa se você entendeu o mecanismo da conversão em vez de ter decorado uma fórmula.

O raciocínio é sempre o mesmo. Entre os dois pontos fixos, qualquer escala é uma régua uniforme. Então a *fração do caminho* percorrida entre o ponto de fusão do gelo e o de ebulição da água é a mesma

em todas as escalas, e é isso que a igualdade abaixo diz.

DEFINIÇÃO 6.3 • Relação entre duas escalas quaisquer

Sejam X_g e X_v as leituras de uma escala X nos pontos de fusão do gelo e de ebulição da água. A leitura T_X de uma temperatura nessa escala se relaciona com a leitura T_C da mesma temperatura em Celsius pela igualdade das frações percorridas entre os pontos fixos.

$$\frac{T_X - X_g}{X_v - X_g} = \frac{T_C - 0}{100 - 0} \tag{6.2}$$

T_X: leitura na escala arbitrária (°X)
X_g: leitura da escala X na fusão do gelo (°X)
X_v: leitura da escala X na ebulição da água (°X)
T_C: temperatura correspondente em Celsius (°C)

EXEMPLO 6.4 • Termômetro com escala própria

Um termômetro industrial teve a escala refeita em unidades próprias, designadas por °P. Aferido em laboratório, ele marca 30 °P no gelo fundente e 230 °P na água em ebulição, ambos sob 1 atm. Que temperatura Celsius corresponde à leitura de 105 °P?

DICA

Não decore a Equação (6.2) com as letras. Monte-a na hora, sempre com a mesma receita: no numerador, a leitura menos o valor do gelo; no denominador, o valor do vapor menos o valor do gelo. Faça isso dos dois lados e iguale. A mesma receita serve para relacionar duas escalas inventadas entre si, sem passar por Celsius.

NOTA

Como as duas leituras são proporcionais, o gráfico de uma escala em função da outra é sempre uma reta. Quando a questão vem com um gráfico em vez de números, dois pontos quaisquer da reta já dão os dados que a Equação (6.2) pede.

1 Compreender

O assunto é a **relação entre duas escalas a partir dos pontos fixos**.

Objetivo. Obter a temperatura Celsius que corresponde à leitura de 105 °P. O que está em jogo é reconhecer que os dois valores dados em °P não são temperaturas quaisquer, e sim as leituras do termômetro nos dois pontos fixos, e que a fração do intervalo percorrida é a mesma nas duas escalas.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.2) e diga o que cada símbolo significa. É tudo de que ela precisa.

2 Organizar

Dados $X_g = 30\,°\text{P}$
$X_v = 230\,°\text{P}$
$T_X = 105\,°\text{P}$.

Conversões nenhuma: as leituras entram como estão.

Estratégia monte a igualdade das frações percorridas, substitua os

quatro valores conhecidos e isole T_C.

3 Resolver

Igualdade das frações. Monte a Equação (6.2) com os valores do enunciado:

$$\frac{T_X - X_g}{X_v - X_g} = \frac{T_C}{100}$$
$$\frac{105 - 30}{230 - 30} = \frac{T_C}{100}$$

Fração percorrida. Resolva as subtrações e simplifique a fração da esquerda:

$$\frac{75}{200} = \frac{T_C}{100}$$
$$0{,}375 = \frac{T_C}{100}$$

Temperatura Celsius. Multiplique os dois lados por 100:

$$T_C = 0{,}375 \times 100$$

$$\boxed{T_C = 37{,}5\,^\circ\text{C}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: 105 °P está pouco acima de um terço do caminho entre 30 e 230, e 37,5 °C está pouco acima de um terço do caminho entre 0 e 100 °C. As frações batem. Outro teste: 130 °P, a metade do intervalo, teria de dar 50 °C, e dá. O mesmo cálculo vale para qualquer termômetro cujos dois pontos fixos você conheça, situação comum em instrumento de campo com a escala apagada.

Cuidado com a pegadinha: não divida a leitura pelo valor do vapor. A fração é *quanto já andou* sobre *quanto vale o caminho inteiro*, que aqui vale $230 - 30 = 200$ unidades, não 230.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2017

O controle de um determinado processo industrial exige o monitoramento de um pequeno intervalo de temperaturas. Para isto, foi construído um termômetro com uma escala linear X. Nesta escala, 0 °X corresponde a 20,000 °C, e 100,00 °X corresponde a 20,500 °C.

O valor em °X correspondente a 20,150 °C é

(A) 7,50

(B) 15,0

(C) 20,0

(D) 30,0

(E) 35,0

2V7KGY

6.2 Dilatação Térmica

Quando um corpo é aquecido, suas partículas vibram com amplitude maior e a distância média entre elas aumenta. O corpo inteiro se expande, e a expansão depende de três coisas: do material, do tamanho que ele já tinha e de quanto a temperatura variou. Quando é resfriado, acontece o contrário, e as mesmas fórmulas valem com ΔT negativo.

6.2.1 Dilatação Linear

DEFINIÇÃO 6.4 • Dilatação Linear

A **dilatação linear** é o aumento de comprimento de uma peça em que uma dimensão predomina sobre as outras, como uma barra, um trilho, um cabo ou um trecho reto de tubulação. O quanto o material se estica por grau é o **coeficiente de dilatação linear**, representado por α.

$$\Delta L = L_0 \, \alpha \, \Delta T \tag{6.3}$$

ΔL: variação de comprimento (m)
L_0: comprimento inicial (m)
α: coeficiente de dilatação linear ($1/^\circ C$)
ΔT: variação de temperatura ($^\circ C$)

O comprimento final sai de somar a variação ao comprimento

inicial, o que dá $L = L_0\,(1 + \alpha\,\Delta T)$.

NOTA

Coeficientes de dilatação linear de alguns materiais comuns, todos em unidades de $10^{-6}/°\text{C}$:

- Aço carbono: 12; concreto: 12 (é por isso que o concreto armado funciona: os dois dilatam junto);
- Cobre: 17;
- Alumínio: 24;
- Vidro comum: 9; vidro borossilicato: 3,2;
- Invar, liga de ferro e níquel: 1,5, usada em padrões de medida justamente por quase não dilatar.

NOTA

O coeficiente α aparece nas provas ora em $1/°\text{C}$, escrito também $°\text{C}^{-1}$, ora em K^{-1}. O valor numérico é o mesmo, porque α multiplica uma *variação* de temperatura, e variação em Celsius e em Kelvin dá o mesmo número. Não converta nada quando encontrar K^{-1} num enunciado com temperaturas em Celsius.

EXEMPLO 6.5 • Dilatação de um trecho de oleoduto

Um trecho reto de linha de aço tem 500 m a 20 °C. Ao receber produto quente, a temperatura da linha sobe para 50 °C. Determine a dilatação do trecho. ($\alpha_{\text{aço}} = 12 \times 10^{-6}/°\text{C}$)

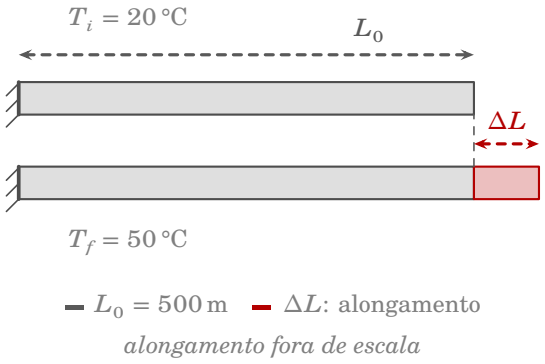


Figura 6.1

1 Compreender

O assunto é a **dilatação linear** de um trecho reto de tubulação.

Objetivo. Obter quanto o trecho ganha de comprimento ao aquecer 30 °C. O que está em jogo é a ordem de grandeza: α é da ordem de 10^{-5}, e a dilatação sai em centímetros, não em metros.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.3) e diga o que cada símbolo significa. Os três dados que ela pede estão no enunciado, e a variação de temperatura sai de uma subtração.

2 Organizar

Dados $L_0 = 500\,\text{m}$
$T_i = 20\,°\text{C}$
$T_f = 50\,°\text{C}$

$\alpha = 12 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$.

Conversões nenhuma: comprimento em metros e α em $1/^{\circ}\text{C}$.

Estratégia calcule ΔT pela subtração e leve os três valores à Equação (6.3).

3 Resolver

Variação de temperatura. Subtraia:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_f - T_i \\ &= 50 - 20 = 30\,^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Dilatação linear. Aplique a equação:

$$\begin{aligned}\Delta L &= L_0\,\alpha\,\Delta T \\ &= 500 \times 12 \times 10^{-6} \times 30 \\ &= 180\,000 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta L = 0{,}18\,\text{m} = 18\,\text{cm}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a dilatação relativa é $\alpha\,\Delta T = 3{,}6 \times 10^{-4}$, ou seja, cerca de 0,04 % do comprimento. Em 500 m isso dá alguns centímetros, e não alguns metros. Se o resultado tivesse dado 18 m, a potência de dez estaria errada. Parece pouco, mas o problema não é o deslocamento e sim a tensão: uma barra impedida de dilatar desenvolve tensão $\sigma = E\,\alpha\,\Delta T$, e com $E \approx 200$ GPa para o aço esses 30 °C valem cerca de 72 MPa, o suficiente para deformar suportes. Por isso oleodutos aéreos são construídos com curvas em "S", juntas de expansão e suportes que deslizam.

Lâmina bimetálica. Duas tiras de metais com coeficientes diferentes, soldadas uma na outra, formam uma lâmina que não pode dilatar livre: como a tira de maior α tenta ficar mais comprida que a outra, o conjunto se encurva, e sempre para o lado do metal de menor α. Aquecendo mais, encurva mais; esfriando, volta. É esse movimento que fecha e abre contato em termostatos de geladeira, ferro de passar e disjuntores térmicos, e é ele que a banca cobra quando fala em "duas barras coladas".

6.2.2 Dilatação Superficial e Volumétrica

DEFINIÇÃO 6.5 • Dilatação Superficial e Volumétrica

Numa placa, o que interessa é a variação de área, medida pelo **coeficiente de dilatação superficial** β; num corpo maciço ou num líquido, a variação de volume, medida pelo **coeficiente de dilatação volumétrica** γ. Em material isotrópico, que dilata igual em todas as direções, os três coeficientes são proporcionais.

$$\beta = 2\alpha \qquad \Delta A = A_0\,\beta\,\Delta T \tag{6.4}$$

$$\gamma = 3\alpha \qquad \Delta V = V_0\,\gamma\,\Delta T \tag{6.5}$$

ΔA: variação de área (m^2)
ΔV: variação de volume (m^3)
A_0, V_0: área e volume iniciais ($\mathrm{m}^2, \mathrm{m}^3$)
β: coeficiente de dilatação superficial ($1/^\circ\mathrm{C}$)
γ: coeficiente de dilatação volumétrica ($1/^\circ\mathrm{C}$)

EXEMPLO 6.6 • Furo de uma chapa aquecida

Uma chapa de aço tem um furo circular de 40,0 mm de diâmetro a 20 °C. A chapa é levada a 320 °C para a montagem de um eixo por interferência. Determine o diâmetro do furo na temperatura de montagem. ($\alpha_{\text{aço}} = 12 \times 10^{-6}/^\circ\mathrm{C}$)

1 Compreender

O assunto é a **dilatação de um furo**.

Objetivo. Obter o diâmetro do furo depois de aquecer a chapa em 300 °C. O que está em jogo é o ponto conceitual: o furo não é uma ausência de material que encolhe quando a chapa cresce, ele dilata como se fosse feito de aço, com o mesmo α da chapa.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.3) e diga o que cada símbolo significa. O diâmetro é um comprimento, então quem resolve é a dilatação linear, não a superficial.

2 Organizar

Dados $d_0 = 40{,}0\,\mathrm{mm}$
$\Delta T = 320 - 20 = 300\,^\circ\mathrm{C}$
$\alpha = 12 \times 10^{-6}/^\circ\mathrm{C}$.

Conversões nenhuma: o diâmetro está em milímetros e a resposta pode ficar em milímetros.

DICA

Decore só o α. O β vale o dobro porque a área tem duas dimensões, e o γ vale o triplo porque o volume tem três. Para líquidos o enunciado dá γ direto, já que líquido não tem forma própria e falar em dilatação linear dele não faz sentido.

NOTA

Este γ não é o mesmo do capítulo anterior. No cap. 5, γ é o peso específico, $\gamma = \rho g$, em $\mathrm{N/m}^3$; aqui é o coeficiente de dilatação volumétrica, em $1/^\circ\mathrm{C}$. As duas convenções são padrão na literatura e o contexto separa uma da outra: repare na unidade que o enunciado dá.

CUIDADO

Furos, orifícios e cavidades dilatam. Um furo aumenta de tamanho quando a peça é aquecida, como se ele fosse feito do mesmo material da peça. Imagine que o furo estivesse preenchido por um disco do próprio material: esse disco dilataria, e o furo tem de acompanhar. Pela mesma razão, o volume interno de um recipiente cresce com o coeficiente do material da parede. A alternativa "o orifício diminui", que aparece em quase toda questão desse tipo, está sempre errada.

Estratégia trate o diâmetro como um comprimento qualquer, calcule Δd pela Equação (6.3) e some ao valor inicial.

3 Resolver

Variação do diâmetro. Trate-o como comprimento:

$$\begin{aligned}\Delta d &= d_0\,\alpha\,\Delta T\\ &= 40{,}0\times 12\times 10^{-6}\times 300\\ &= 144\,000\times 10^{-6} = 0{,}144\,\text{mm}\end{aligned}$$

Diâmetro final. Some ao diâmetro inicial:

$$\begin{aligned}d &= d_0 + \Delta d\\ &= 40{,}000 + 0{,}144\end{aligned}$$

$$\boxed{d = 40{,}144\,\text{mm}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o furo aumentou pouco mais de um décimo de milímetro, o que é da ordem de 0,36 % do diâmetro, compatível com $\alpha\,\Delta T = 3{,}6\times 10^{-3}$. Se tivesse dado um valor negativo, a física estaria invertida. Essa é exatamente a técnica de montagem por dilatação usada em oficina: aquece-se o mancal ou o acoplamento, encaixa-se o eixo com folga e, ao esfriar, o furo aperta o eixo. A mesma ideia explica por que uma tampa metálica emperrada solta depois de alguns segundos sob água quente.

Cuidado com a pegadinha: não use $\beta = 2\alpha$ aqui. O enunciado pede diâmetro, que é comprimento; β só entraria se a pergunta fosse sobre a *área* do furo.

6.2.3 Dilatação Aparente dos Líquidos

Quando um líquido está dentro de um recipiente, os dois dilatam ao mesmo tempo. O que se observa, o que transborda ou o que sobe pelo tubo, é só a diferença entre as duas dilatações.

> **DEFINIÇÃO 6.6** • Dilatação Aparente
>
> A **dilatação aparente** de um líquido é a parte da dilatação que fica visível porque o recipiente não conseguiu acompanhá-la. Ela é medida pelo **coeficiente de dilatação aparente**, a diferença entre o coeficiente volumétrico do líquido e o do recipiente.

$$\gamma_{ap} = \gamma_{liq} - \gamma_{rec} \qquad \Delta V_{ap} = V_0\,\gamma_{ap}\,\Delta T \tag{6.6}$$

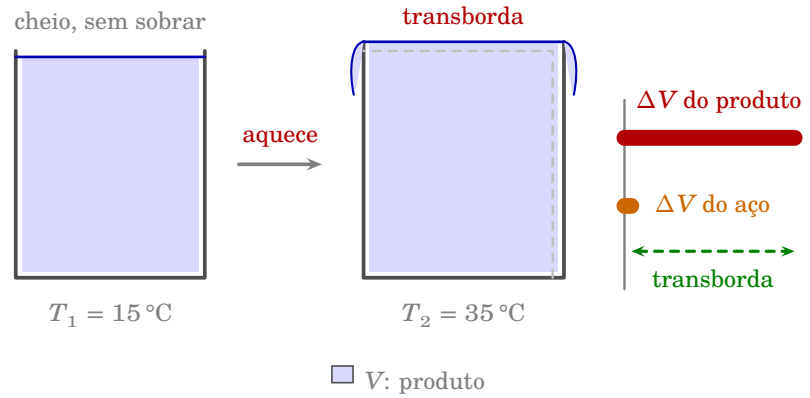
γ_{ap}: coeficiente de dilatação aparente ($1/°C$)
γ_{liq}: coeficiente volumétrico do líquido ($1/°C$)
γ_{rec}: coeficiente volumétrico do recipiente ($1/°C$)
ΔV_{ap}: volume que transborda ou sobe pelo tubo (m^3)
V_0: volume inicial de líquido (m^3)

CUIDADO

Se o enunciado der o coeficiente *linear* do recipiente, ele precisa ser triplicado antes de entrar na conta: $\gamma_{rec} = 3\alpha_{rec}$. Esquecer esse fator 3 é o erro mais comum das questões de dilatação aparente. E se o enunciado mandar desprezar a dilatação do recipiente, então $\gamma_{ap} = \gamma_{liq}$, sem subtração nenhuma.

EXEMPLO 6.7 • Produto que transborda de um tanque cheio

Um tanque de aço de $10\,000\,m^3$ está completamente cheio de produto a $15\,°C$. Ao longo do dia a temperatura sobe para $35\,°C$. Determine o volume de produto que transborda. ($\gamma_{produto} = 9 \times 10^{-4}/°C$; $\gamma_{aço} = 36 \times 10^{-6}/°C$)



recipiente dilatado exagerado no desenho; a proporção real está nas barras

Figura 6.2

1 Compreender

O assunto é a **dilatação aparente**: os dois materiais dilatam, o produto ganha volume e o tanque também, porque o volume interno de um recipiente cresce junto com as paredes.

Objetivo. Obter quantos metros cúbicos de produto escorrem pela borda. O que está em jogo é ver que só transborda o excesso, a diferença entre as duas dilatações, e que o enunciado já dá os dois coeficientes na forma volumétrica, sem fator 3 a aplicar.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.6) e diga o que cada símbolo significa. O coeficiente aparente é a subtração, e o resto é a dilatação volumétrica com ele.

2 Organizar

Dados $V_0 = 10\,000\,m^3$
$\Delta T = 35 - 15 = 20\,°C$

$\gamma_{liq} = 9 \times 10^{-4}/^{\circ}\text{C}$
$\gamma_{rec} = 36 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}.$

Conversões nenhuma: os dois coeficientes já vêm na forma volumétrica e em $1/^{\circ}\text{C}$; só é preciso pô-los na mesma potência de dez.

Estratégia calcule o coeficiente aparente pela subtração e aplique a Equação (6.6).

3 Resolver

Coeficiente aparente. Coloque os dois coeficientes na mesma potência de dez e subtraia:

$$\begin{aligned}\gamma_{ap} &= \gamma_{liq} - \gamma_{rec} \\ &= 900 \times 10^{-6} - 36 \times 10^{-6} \\ &= 864 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}\end{aligned}$$

Volume que transborda. Aplique a dilatação aparente:

$$\begin{aligned}\Delta V_{ap} &= V_0\, \gamma_{ap}\, \Delta T \\ &= 10\,000 \times 864 \times 10^{-6} \times 20 \\ &= 172\,800 \times 10^{-3}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta V_{ap} = 172{,}8\,\text{m}^3}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o produto dilata 25 vezes mais que o aço (9×10^{-4} contra 36×10^{-6}), então o transbordamento tinha de ficar logo abaixo da dilatação do próprio produto, que seria $180\,\text{m}^3$. Os $7{,}2\,\text{m}^3$ de diferença são a contribuição do tanque, cerca de 4 %. É por causa dessa conta que tanque de armazenamento não é enchido até a borda: a folga de enchimento existe para acomodar a expansão do produto entre a madrugada e a tarde, e o procedimento operacional fixa um nível máximo bem abaixo do teto. Perceba a ordem de grandeza: $172{,}8\,\text{m}^3$ são mais de mil barris de produto, o que transforma um detalhe de Física num prejuízo e num incidente ambiental.

CUIDADO

Guarde a ordem de grandeza: líquidos têm γ da ordem de $10^{-4}/^{\circ}\text{C}$ e sólidos, de $10^{-5}/^{\circ}\text{C}$. Um líquido dilata tipicamente de dez a trinta vezes mais que o recipiente metálico que o contém, e é por isso que desprezar a dilatação do recipiente raramente muda a alternativa.

EXEMPLO 6.8 • Dilatação anômala da água

Entre 0 °C e 4 °C a água se contrai ao ser aquecida, e atinge densidade máxima a 4 °C. Explique por que esse comportamento anômalo permite que a vida aquática sobreviva ao inverno em lagos de regiões frias.

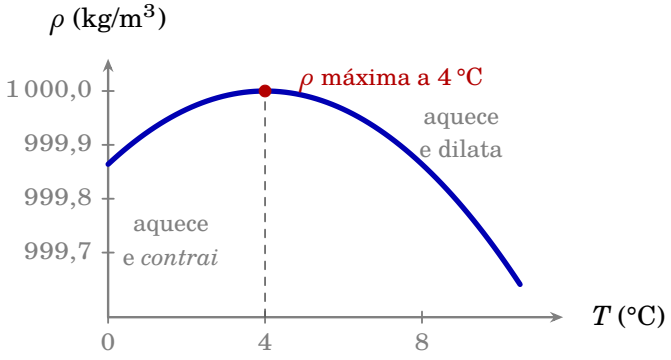


Figura 6.3

1 Compreender

O assunto é a ligação entre **dilatação e densidade**, numa questão conceitual.

Objetivo. Explicar como a curva de densidade da água decide o que afunda e o que fica na superfície de um lago que esfria. O que está em jogo é a inversão da regra geral: em quase todo material aquecer dilata e dilatar diminui a densidade, e a água inverte isso numa faixa estreita, de 0 a 4 °C.

Antes de seguir, releia a Definição 6.5 e diga com suas palavras o que ela afirma. A densidade é a massa dividida pelo volume, Equação (5.1) do cap. 5; se o volume cresce com a temperatura, a densidade cai.

2 Organizar

Dados densidade máxima da água a 4 °C
gelo menos denso que a água líquida.

Conversões nenhuma: a questão é conceitual.

Estratégia acompanhe a água da superfície enquanto ela esfria e, a cada etapa, compare a densidade dela com a da água de baixo para decidir se ela afunda ou fica.

3 Resolver

Lago acima de 4 °C. A água da superfície perde calor para o ar, fica mais densa e afunda, e água mais quente sobe para ocupar o lugar.

Essa circulação continua enquanto esfriar significar ficar mais denso.

Superfície a 4 °C. A circulação para. Toda a água que afundou está no fundo, na temperatura de densidade máxima.

Abaixo de 4 °C. A regra se inverte: continuar esfriando torna a água da superfície *menos* densa, e ela deixa de afundar. A camada fria fica retida em cima.

Congelamento. A superfície chega a 0 °C e congela. O gelo é ainda menos denso que a água líquida e flutua, formando uma tampa que isola termicamente o que está embaixo.

O fundo do lago permanece a cerca de 4 °C, com água líquida, mesmo com a superfície congelada, e é isso que mantém a vida aquática durante o inverno.

4 Avaliar

Avalie a coerência do raciocínio pelo caso contrário: se a água tivesse densidade sempre decrescente com a temperatura, como quase todos os líquidos, a água mais fria afundaria até o fim e o lago congelaria de baixo para cima, levando o gelo a ocupar todo o volume. Os ecossistemas de água doce de região fria não existiriam nessa forma. Perceba que são dois fatos independentes trabalhando juntos: a densidade máxima a 4 °C e o gelo menos denso que a água líquida. O segundo fato tem consequência industrial direta: água esquecida dentro de uma linha ou de um trocador em ambiente frio expande ao congelar e rompe a tubulação.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014

Uma tubulação industrial de 100 metros em linha reta contém uma junta de expansão para reduzir a tensão devido à dilatação térmica. O coeficiente de dilatação térmica do material da tubulação é aproximadamente igual a $0{,}01\,\text{mm}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Na temperatura de 150 °C, a junta de expansão sofre pressão e comprime-se 75 mm.

Se a pressão de ruptura da junta de expansão é de $65\,\text{kgf/cm}^2$, correspondendo a uma compressão de 215 mm, então, a temperatura máxima, em °C, que a tubulação pode atingir é de, aproximadamente,

(A) 150
(B) 190
(C) 230
(D) 290
(E) 320

S7PTPK

6.3 Calor e Calorimetria

O **calor** é energia em trânsito entre dois corpos, provocada por uma diferença de temperatura. Ele existe enquanto a diferença existir e deixa de existir no equilíbrio térmico. Corpo nenhum "tem" calor: o que o corpo guarda é **energia interna**, a soma das energias de agitação e de ligação das suas partículas. Calor é o nome do processo de transferência, e essa distinção é cobrada em prova na forma de alternativas do tipo "o corpo mais quente tem mais calor".

6.3.1 Calor Sensível

DEFINIÇÃO 6.7 • Calor Sensível

Calor sensível é o calor que provoca variação de temperatura, sem mudar o estado físico da substância. O quanto de energia cada quilograma de material precisa para subir um grau é o **calor específico** do material, representado por c.

$$Q = m\,c\,\Delta T \tag{6.7}$$

Q: quantidade de calor trocada (J)

m: massa do corpo (kg)
c: calor específico do material (J/(kg · °C))
ΔT: variação de temperatura (°C)

O sinal de Q diz o sentido da troca: $Q > 0$ quando o corpo *recebe* calor e esquenta, $Q < 0$ quando ele *cede* calor e esfria. Na prática, $\Delta T = T_f - T_i$ já entrega o sinal certo.

NOTA

Calores específicos usuais, em J/(kg·°C), com o valor em cal/(g·°C) entre parênteses:

- Água líquida: 4 186 (1,0), o maior entre os materiais comuns;
- Gelo e vapor d'água: cerca de 2 090 (0,5);
- Petróleo e derivados, faixa usual: cerca de 2 000 (0,48);
- Alumínio: 921 (0,22); ferro e aço: cerca de 460 (0,11); cobre: 387 (0,092).

DEFINIÇÃO 6.8 • Capacidade Térmica

A **capacidade térmica** de um objeto é o calor necessário para elevar em um grau a temperatura dele inteiro. Ela depende do material e também da massa, e por isso é característica do objeto, não da substância.

DICA

Muita questão da banca vem em calorias, com massa em gramas. Nesse sistema, $c_{\text{água}} = 1$ cal/(g · °C), o que simplifica a conta a ponto de compensar não converter para o SI. A regra é não misturar: ou tudo em joule, quilograma e kelvin, ou tudo em caloria, grama e grau Celsius.

$$C = m\,c \qquad \text{e portanto} \qquad Q = C\,\Delta T \tag{6.8}$$

C: capacidade térmica do objeto (J/°C)
m: massa do objeto (kg)
c: calor específico do material (J/(kg · °C))

EXEMPLO 6.9 • Calor para aquecer a carga de uma caldeira

Determine a quantidade de calor necessária para aquecer 2 000 kg de água de 25 °C para 90 °C. ($c_{\text{água}} = 4\,186$ J/(kg · °C))

1 Compreender

O assunto é o **calor sensível**.

Objetivo. Obter a energia que a caldeira precisa entregar para esse aquecimento. O que está em jogo é conferir que não há mudança de fase: a água chega a 90 °C, abaixo da ebulição, então toda a energia vai para subir a temperatura.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.7) e diga o que cada símbolo significa. Os três dados já vêm no sistema certo, joule, quilograma e grau Celsius.

2 Organizar

Dados $m = 2\,000\,\text{kg}$
$T_i = 25\,^\circ\text{C}$
$T_f = 90\,^\circ\text{C}$
$c = 4\,186\,\text{J/(kg}\cdot{}^\circ\text{C)}$.

Conversões nenhuma: joule, quilograma e grau Celsius.

Estratégia calcule ΔT e multiplique os três fatores da Equação (6.7).

3 Resolver

Variação de temperatura. Subtraia:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_f - T_i \\ &= 90 - 25 = 65\,^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Calor sensível. Multiplique os três fatores:

$$\begin{aligned}Q &= m\,c\,\Delta T \\ &= 2\,000 \times 4\,186 \times 65 \\ &= 544\,180\,000\,\text{J}\end{aligned}$$

$$\boxed{Q = 5{,}44 \times 10^8\,\text{J} \approx 544\,\text{MJ}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: cada quilograma de água precisa de cerca de 272 kJ para subir 65 °C, e duas toneladas multiplicam isso por dois mil, o que leva mesmo à casa das centenas de megajoules. 544 MJ é a energia de combustão de cerca de 11 kg de gás natural, que libera perto de 50 MJ por quilograma. Como a caldeira não aproveita tudo, com rendimento típico de 80 % a 90 % o consumo real de combustível fica um pouco acima disso. O alto calor específico da água é o que a torna o fluido de resfriamento e de aquecimento preferido em refinaria: ela carrega muita energia por quilograma transportado.

EXEMPLO 6.10 • Potência térmica com vazão mássica

Água circula por um trocador de calor com vazão mássica de 1 kg/s, entrando a 25 °C e saindo a 45 °C. Determine a potência térmica retirada do processo, em kW. ($c_{\text{água}} = 4{,}2\,\text{kJ/(kg}\cdot\text{°C)}$)

1 Compreender

O assunto é o calor sensível em regime contínuo, com **vazão mássica** no lugar da massa, versão que a banca gosta.

Objetivo. Obter quantos quilowatts de calor a água retira do processo enquanto escoa. O que está em jogo é perceber que, quando a massa vira massa por segundo, o calor vira calor por segundo, ou seja, potência.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.7) e diga o que cada símbolo significa. Ela é a mesma, aplicada ao quilograma que passa a cada segundo.

2 Organizar

Dados $\dot{m} = 1\,\text{kg/s}$
$T_i = 25\,^\circ\text{C}$
$T_f = 45\,^\circ\text{C}$
$c = 4{,}2\,\text{kJ/(kg}\cdot\,^\circ\text{C)}$.

Conversões nenhuma: com c em kJ/(kg·°C) o resultado sai direto em kW.

Estratégia troque m por $\dot{m}$ na fórmula do calor sensível e multiplique pelos outros dois fatores; a unidade sai em kJ/s, que é kW.

3 Resolver

Variação de temperatura. Subtraia:

$$\begin{aligned}\Delta T &= T_f - T_i \\ &= 45 - 25 = 20\,^\circ\text{C}\end{aligned}$$

Potência térmica. Aplique a fórmula com a vazão mássica no lugar da massa:

$$\begin{aligned}\dot{Q} &= \dot{m}\, c\, \Delta T \\ &= 1 \times 4{,}2 \times 20 \\ &= 84\,\text{kJ/s}\end{aligned}$$

$$\dot{Q} = 84\,\text{kW}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência da unidade antes do número: quilograma por segundo vezes quilojoule por quilograma e por grau vezes grau dá quilojoule por segundo, que é quilowatt. 84 kW é a ordem de grandeza de um trocador pequeno, de utilidade; com 50 kg/s a mesma conta daria os poucos megawatts de um trocador de processo. A água que sai a 45 °C segue para a torre de resfriamento, onde devolve essa energia ao ar.

Cuidado com a pegadinha: com vazão mássica em kg/s, o resultado de $m\,c\,\Delta T$ já é potência, em watt. Usar a massa total acumulada devolve energia em joule, outra grandeza e outra alternativa.

6.3.2 Equilíbrio Térmico e Calorimetria

DEFINIÇÃO 6.9 • Princípio das Trocas de Calor

Num sistema termicamente isolado, o calor cedido pelos corpos quentes é igual em módulo ao calor recebido pelos corpos frios. Com a convenção de sinais do calor sensível, isso se escreve numa única soma nula, e é essa equação que resolve todo problema de **calorimetria**.

$$\sum Q = 0 \qquad \text{ou} \qquad Q_{\text{cedido}} + Q_{\text{recebido}} = 0 \tag{6.9}$$

Q: calor trocado por cada corpo, com sinal (J)

DICA

Escreva um termo $m\,c\,(T_f - T_i)$ para cada corpo, sempre com a mesma incógnita T_f, e some tudo igualando a zero. Não tente adivinhar quem cede e quem recebe: o sinal de cada parcela sai sozinho da subtração $T_f - T_i$.

EXEMPLO 6.11 • Equilíbrio térmico entre dois fluidos

Dois fluidos são misturados em um tanque isolado: 500 kg do fluido A a 120 °C, com $c_A = 2\,000$ J/(kg · °C), e 200 kg do fluido B a 20 °C, com $c_B = 4\,000$ J/(kg · °C). Determine a temperatura de equilíbrio.

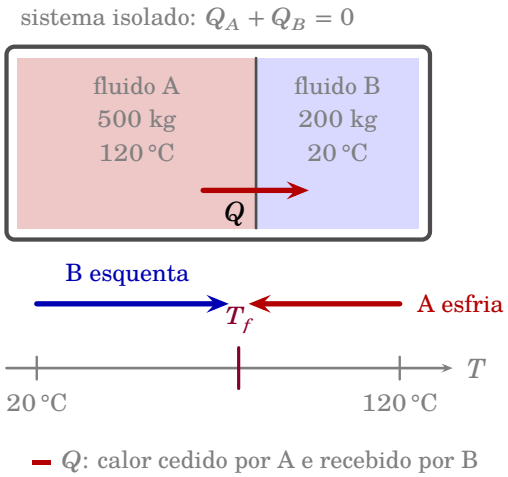


Figura 6.4

1 Compreender

O assunto é o **princípio das trocas de calor** num sistema isolado, sem mudança de fase.

Objetivo. Obter a temperatura em que a mistura estabiliza. O que está em jogo é escrever o mesmo T_f para os dois fluidos e deixar que os sinais saiam das subtrações: o fluido A, mais quente, cede, e o fluido B recebe, e o resultado tem de ficar entre 20 e 120 °C.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.9) e diga o que cada símbolo significa. Cada parcela é um calor sensível, Equação (6.7).

2 Organizar

Dados $m_A = 500$ kg
$T_A = 120$ °C
$c_A = 2\,000$
$m_B = 200$ kg
$T_B = 20$ °C
$c_B = 4\,000$, os dois calores específicos em J/(kg · °C).

Conversões nenhuma: tudo no SI.

Estratégia monte a Equação (6.9) com um termo para cada fluido, deixando T_f nos dois, e isole a incógnita.

3 **Resolver**

Soma dos calores. Monte-a com o mesmo T_f nas duas parcelas:

$$m_A\,c_A\,(T_f - T_A) + m_B\,c_B\,(T_f - T_B) = 0$$

Capacidades térmicas. Substitua os valores:

$$\begin{aligned} 500 \times 2\,000\,(T_f - 120) + 200 \times 4\,000\,(T_f - 20) &= 0 \\ 10^6\,(T_f - 120) + 8 \times 10^5\,(T_f - 20) &= 0 \end{aligned}$$

Equação em T_f. Distribua os produtos e junte os termos em T_f de um lado:

$$\begin{aligned} 10^6\,T_f - 120 \times 10^6 + 8 \times 10^5\,T_f - 16 \times 10^6 &= 0 \\ 1{,}8 \times 10^6\,T_f &= 136 \times 10^6 \end{aligned}$$

Temperatura de equilíbrio. Divida os dois lados por $1{,}8 \times 10^6$:

$$T_f = \frac{136}{1{,}8}$$

$$\boxed{T_f \approx 75{,}6\,^\circ\text{C}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o resultado ficou entre as duas temperaturas iniciais e mais perto do fluido A, o de maior capacidade térmica: $C_A = 10^6$ J/°C contra $C_B = 8 \times 10^5$ J/°C. O fluido B tem o dobro do calor específico, mas menos da metade da massa, e é o produto dos dois que decide. Em trocador de calor industrial, é essa equação que dá a temperatura de saída de cada corrente, e daí sai o dimensionamento da área de troca.

Cuidado com a pegadinha: a temperatura de equilíbrio não é a média das iniciais. A média daria 70 °C, e só coincidiria com o resultado se as capacidades térmicas fossem iguais.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operador I, 2006
Se dois corpos feitos com o mesmo material, um de massa 10 g a 80 °C e outro de 15 g a 20 °C, forem colocados em um calorímetro ideal, a temperatura no equilíbrio térmico será:

(A) 20 °C
(B) 32 °C
(C) 44 °C
(D) 50 °C
(E) 56 °C

PNMNSF

6.4 Mudanças de Fase e Calor Latente

Durante uma **mudança de fase** a substância recebe ou cede energia sem que a temperatura mude. A energia entra, mas em vez de aumentar a agitação das partículas ela vai romper ou formar as ligações que prendem uma partícula à outra. É por isso que o gelo em fusão fica em 0 °C do começo ao fim, mesmo com a chama ligada embaixo da panela.

DEFINIÇÃO 6.10 • Calor Latente

Calor latente é o calor trocado durante uma mudança de fase, a temperatura constante. O **calor latente** L da substância é a energia necessária por quilograma para completar a mudança de estado.

$$Q = m\,L \tag{6.10}$$

Q: calor trocado na mudança de fase (J)
m: massa que muda de fase (kg)
L: calor latente da substância (J/kg)

Para a água, $L_f = 334$ kJ/kg na fusão (80 cal/g) e $L_v = 2\,260$ kJ/kg na vaporização (540 cal/g). O sinal segue a mesma convenção do calor sensível: positivo quando a substância recebe energia, na fusão e na vaporização, e negativo quando cede, na solidificação e na condensação.

NOTA

Compare as duas parcelas para a água: vaporizar um quilograma custa $2\,260$ kJ, enquanto aquecer esse mesmo quilograma de 0 a 100 °C custa apenas $418{,}6$ kJ. A vaporização consome mais de cinco vezes mais energia, e é essa energia que o vapor devolve ao condensar. Daí o vapor ser o fluido de aquecimento mais usado na indústria.

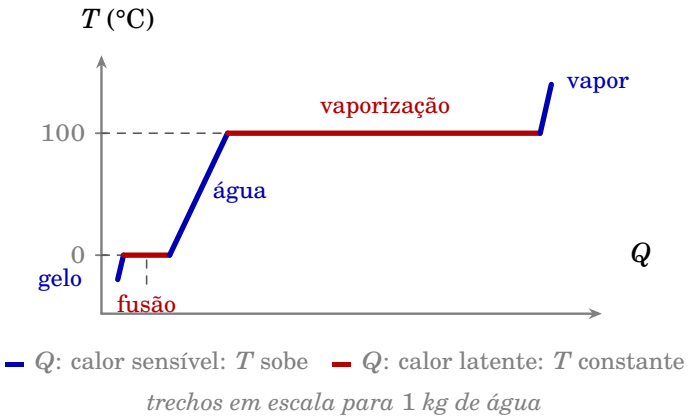


Figura 6.5

EXEMPLO 6.12 • Calor total para gerar vapor

Calcule a quantidade de calor necessária para transformar 100 kg de água a 25 °C em vapor a 100 °C. ($c_{\text{água}} = 4\,186$ J/(kg · °C); $L_v = 2\,260$ kJ/kg)

DICA

Leia a curva de aquecimento como uma sequência de trechos: nos trechos inclinados a temperatura sobe e vale $Q = m\,c\,\Delta T$, com o c da fase em que a substância está; nos trechos horizontais a temperatura fica parada e vale $Q = m\,L$. Um problema com várias etapas é a soma dos trechos, e o número de trechos é a primeira coisa a contar.

1 Compreender

O assunto é a **soma de calor sensível e calor latente**: o processo tem duas etapas de naturezas diferentes.

Objetivo. Obter a energia total das duas etapas somadas. O que está em jogo é contar as etapas certas: a água líquida sobe de 25 a 100 °C, com a temperatura variando, e depois vaporiza a 100 °C, com a temperatura parada; como o enunciado para no vapor a 100 °C, não há terceira etapa.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.10) e diga o que cada símbolo significa. A primeira etapa é a Equação (6.7); a segunda é esta.

2 Organizar

Dados $m = 100$ kg
$T_i = 25$ °C
$T_f = 100$ °C
$c = 4\,186$ J/(kg · °C)
$L_v = 2\,260$ kJ/kg.

Conversões $L_v = 2\,260$ kJ/kg $= 2{,}260 \times 10^6$ J/kg.

Estratégia calcule Q_1 pela Equação (6.7), depois Q_2 pela Equação (6.10), e some as duas parcelas.

3 Resolver

Aquecimento até a ebulição. Calor sensível da água líquida:

$$\begin{aligned} Q_1 &= m\,c\,\Delta T \\ &= 100 \times 4\,186 \times 75 \\ &= 31{,}4 \times 10^6\,\text{J} = 31{,}4\,\text{MJ} \end{aligned}$$

Vaporização. Calor latente de toda a massa a 100 °C:

$$\begin{aligned} Q_2 &= m\,L_v \\ &= 100 \times 2{,}260 \times 10^6 \\ &= 226 \times 10^6\,\text{J} = 226\,\text{MJ} \end{aligned}$$

Calor total. Some as duas parcelas:

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= 31{,}4 + 226 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q = 257{,}4\,\text{MJ}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a vaporização responde por 226 dos 257,4 MJ, 88 % do total, como a comparação entre L_v e o calor de aquecimento fazia esperar. Se a etapa sensível tivesse saído maior que a latente, haveria erro de conta. Caldeiras são projetadas em torno desse desequilíbrio: a maior parte da superfície de troca fica na zona de vaporização. O vapor alimenta refervedores de torres de destilação, traços de aquecimento de linhas de óleo pesado e turbinas.

Cuidado com a pegadinha: não use $\Delta T = 100$ na primeira etapa. A água parte de 25 °C, então $\Delta T = 75\,^\circ\text{C}$; usar 100 inflaria Q_1 em um terço.

> **EXEMPLO 6.13** • Mistura de gelo e água quente
>
> Em um calorímetro ideal, misturam-se 200 g de gelo a $-10\,^\circ\text{C}$ com 500 g de água a 60 °C. Determine a temperatura final da mistura. ($c_{\text{gelo}} = 0{,}5\,\text{cal/(g}\cdot{}^\circ\text{C)}$; $c_{\text{água}} = 1\,\text{cal/(g}\cdot{}^\circ\text{C)}$; $L_f = 80\,\text{cal/g}$)

1 Compreender

O assunto é a **calorimetria com mudança de fase**, o tipo mais cobrado do capítulo.

Objetivo. Decidir qual é o estado final da mistura e obter a temperatura em que o sistema estabiliza. O que está em jogo é não montar a equação direto: antes é preciso descobrir o estado final, porque ele muda a equação. Três desfechos são possíveis: nem todo o gelo funde e a mistura para em 0 °C; todo o gelo funde exatamente a 0 °C; ou todo o gelo funde e ainda sobra energia para aquecer o conjunto.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.9) e diga o que cada símbolo significa. As parcelas vêm das Equações (6.7) e (6.10).

2 Organizar

Dados $m_g = 200\,\text{g}$ a $-10\,^\circ\text{C}$
$m_a = 500\,\text{g}$ a $60\,^\circ\text{C}$
$c_g = 0{,}5$
$c_a = 1$
$L_f = 80\,\text{cal/g}$.

Conversões nenhuma: tudo em caloria, grama e grau Celsius, de propósito.

Estratégia calcule quanto calor o gelo precisa para chegar a 0 °C e fundir todo, calcule quanto calor a água pode ceder até 0 °C, compare os dois valores e só então monte a equação do desfecho certo. Tudo em caloria e grama, sem converter.

3 Resolver

Calor necessário ao gelo. Para aquecer até 0 °C e fundir por inteiro:

$$\begin{aligned} Q_{\text{nec}} &= m_g\, c_g\, \Delta T_g + m_g\, L_f \\ &= 200 \times 0{,}5 \times 10 + 200 \times 80 \\ &= 1\,000 + 16\,000 = 17\,000\,\text{cal} \end{aligned}$$

Calor disponível na água. Ao esfriar de 60 até 0 °C:

$$\begin{aligned} Q_{\text{disp}} &= m_a\, c_a\, \Delta T_a \\ &= 500 \times 1 \times 60 = 30\,000\,\text{cal} \end{aligned}$$

Comparação. Como $30\,000 > 17\,000$, todo o gelo funde e ainda

sobra energia. Calcule quanto sobra:

$$\begin{aligned} Q_{\text{rest}} &= Q_{\text{disp}} - Q_{\text{nec}} \\ &= 30\,000 - 17\,000 = 13\,000\,\text{cal} \end{aligned}$$

Temperatura final. Essa energia aquece os 700 g de água resultante a partir de 0 °C:

$$\begin{aligned} Q_{\text{rest}} &= (m_g + m_a)\, c_a\, T_f \\ 13\,000 &= 700 \times 1 \times T_f \\ T_f &= \frac{13\,000}{700} \end{aligned}$$

$$T_f \approx 18{,}6\,^\circ\text{C}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o resultado ficou entre 0 e 60 °C e bem mais próximo do frio, pelo custo alto da fusão: dos 17 000 cal que o gelo consumiu, 16 000 foram só para fundir e 1 000 para aquecê-lo de −10 até 0 °C. Estado final: 700 g de água líquida a 18,6 °C, sem gelo. Se o calor disponível fosse menor que 17 000 cal, a temperatura final seria 0 °C, com parte do gelo ainda sólido.

Cuidado com a pegadinha: montar $\sum Q = 0$ de saída, sem a comparação, dá um número que parece bom e está errado sempre que o gelo não funde todo. Comparar calor necessário e calor disponível é etapa obrigatória quando há mudança de fase.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2018

Em um processamento, 200 kg de água a 30 °C são aquecidos até a obtenção de 200 kg de vapor d'água a 110 °C.

Dados: calor latente de vaporização da água: $2{,}3 \times 10^6\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$; calor específico da água: $4{,}2 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; calor específico do vapor d'água: $2{,}0 \times 10^3\ \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

A quantidade de calor, em J, necessária para esse processamento corresponde aproximadamente a

(A) $4{,}0 \times 10^6$

(B) $5{,}9 \times 10^7$

(C) $6{,}3 \times 10^7$

(D) $4{,}2 \times 10^8$

(E) $5{,}2 \times 10^8$

HVXWD8

6.5 Propagação de Calor

O calor vai do corpo mais quente para o mais frio por três mecanismos, e a banca cobra tanto a conta de cada um quanto a identificação de qual está agindo em cada situação. O critério para distinguir é sempre o mesmo: o que está se deslocando.

6.5.1 Condução

DEFINIÇÃO 6.11 • Condução

A **condução** é a propagação de calor de partícula a partícula, por agitação transmitida ao vizinho, sem que haja transporte de matéria. É o mecanismo dos sólidos e dos fluidos em repouso. A grandeza que mede a facilidade com que um material conduz é a **condutividade térmica** k: metais têm k alto e são condutores, ar parado e materiais porosos têm k baixo e são isolantes.

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} = \frac{k A\, \Delta T}{L} \tag{6.11}$$

Φ: fluxo de calor, ou potência térmica (W)
k: condutividade térmica do material ($\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$)
A: área da seção atravessada pelo calor (m^2)
ΔT: diferença de temperatura entre as faces (°C ou K)
L: espessura atravessada (m)

CUIDADO

Na Lei de Fourier, L é a espessura na direção em que o calor atravessa, e A é a área perpendicular a essa direção. Numa parede, L é a espessura e A é a área da face; numa barra que liga dois recipientes, L é o comprimento da barra e A é a área da seção transversal. Trocar os dois é o erro clássico da questão da barra.

6.5.2 Convecção

A **convecção** é a propagação por deslocamento de massa de fluido. O fluido aquecido dilata, fica menos denso, sobe, e o fluido frio desce para ocupar o lugar, formando as correntes de convecção. Ela é **natural** quando essas correntes nascem só da diferença de densidade, e **forçada** quando bomba ou ventilador impõe o movimento. Como depende de matéria em movimento, a convecção não ocorre em sólidos nem no vácuo.

6.5.3 Radiação

DEFINIÇÃO 6.12 • Radiação

A **radiação** é a propagação de calor por ondas eletromagnéticas, principalmente no infravermelho. É o único mecanismo que dispensa meio material e funciona no vácuo. Todo corpo acima do zero absoluto irradia, e a fração da radiação máxima que ele emite é a **emissividade** ε, um número entre 0 e 1.

$$P = \varepsilon\,\sigma\,A\,T^4 \tag{6.12}$$

P: potência irradiada (W)
ε: emissividade da superfície, entre 0 e 1 (–)
σ: constante de Stefan-Boltzmann, $5{,}67 \times 10^{-8}$ (W/(m^2 · K^4))
A: área da superfície emissora (m^2)
T: temperatura absoluta da superfície (K)

CUIDADO

Na Lei de Stefan-Boltzmann, T é obrigatoriamente a temperatura absoluta, em kelvin, e ela entra elevada à quarta potência. Usar o valor em Celsius não erra "um pouco": erra por ordens de grandeza. Converta antes de qualquer conta.

NOTA

Um corpo negro ideal tem $\varepsilon = 1$: absorve e emite o máximo possível. Superfícies polidas e claras têm emissividade baixa, refletem mais e perdem menos calor por radiação, e é por isso que tanques e tubulações expostos ao sol são pintados em cores claras ou revestidos com alumínio.

EXEMPLO 6.14 • Condução por parede refratária

Uma parede refratária de forno tem 20 cm de espessura e 10 m^2 de área. A face interna está a 800 °C e a externa, a 50 °C. Calcule o fluxo de calor perdido pela parede. ($k = 1{,}5\ W/(m \cdot K)$)

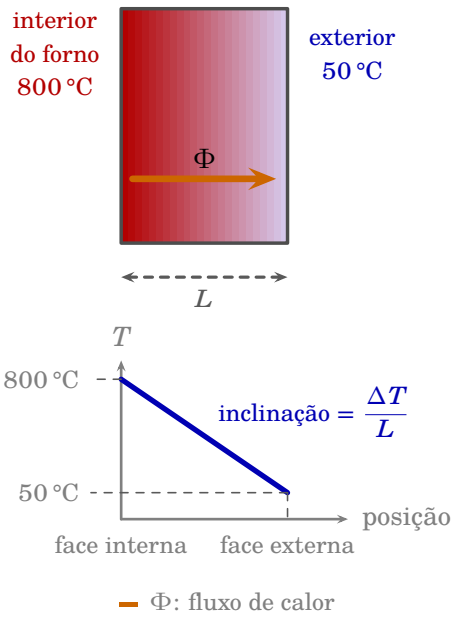


Figura 6.6

1 Compreender

O assunto é a **Lei de Fourier** numa parede plana com as duas faces a temperaturas fixas.

Objetivo. Obter quantos watts saem continuamente pela parede. O que está em jogo é separar o que é espessura e o que é área: o calor atravessa os 20 cm, então essa é a espessura L, e os 10 m^2 são a área da face, perpendicular ao caminho do calor; e a espessura vem em centímetros.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.11) e diga o que cada símbolo significa. A diferença de temperatura entra em kelvin ou em Celsius indiferentemente, porque é uma variação.

2 Organizar

Dados $L = 20\ cm$
$A = 10\ m^2$
$T_{int} = 800\ °C$
$T_{ext} = 50\ °C$
$k = 1{,}5\ W/(m \cdot K)$.

Conversões $L = 20\ cm = 0{,}20\ m$.

Estratégia calcule ΔT e aplique a Equação (6.11).

3 Resolver

Diferença de temperatura. Entre as faces:

$$\begin{aligned}\Delta T &= 800 - 50 \\ &= 750\,^{\circ}\mathrm{C} = 750\,\mathrm{K}\end{aligned}$$

Lei de Fourier. Aplique-a com a espessura em metros:

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{k A\,\Delta T}{L} \\ &= \frac{1{,}5 \times 10 \times 750}{0{,}20} \\ &= \frac{11\,250}{0{,}20}\end{aligned}$$

$$\Phi = 56\,250\,\mathrm{W} \approx 56{,}3\,\mathrm{kW}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: dividir por 0,20 é multiplicar por cinco, então o resultado tinha de ser cinco vezes o numerador, e é. A diferença de temperatura entra em kelvin ou em Celsius, porque é uma variação. 56 kW de perda contínua são cerca de 4,9 GJ por dia, perto de 100 kg de gás natural queimados só para aquecer o pátio. É por isso que refratários com k abaixo de 0,5 W/(m · K) se pagam rápido, e que a termografia de paredes de forno é rotina de inspeção.

Cuidado com a pegadinha: manter a espessura em centímetros dá $\Phi = 11\,250/20 = 562{,}5$ W, cem vezes menor. Converta 20 cm = 0,20 m no Organizar.

> **EXEMPLO 6.15** • Radiação pela parede externa de um forno
>
> A parede externa de um forno tem $20\,\mathrm{m}^2$ de área e se encontra a 127 °C. Considerando emissividade $\varepsilon = 0{,}90$, determine a potência irradiada pela parede. ($\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$)

1 Compreender

O assunto é a **Lei de Stefan-Boltzmann**.

Objetivo. Obter quantos watts a parede emite na forma de radiação. O que está em jogo é a temperatura absoluta: ela tem de entrar em kelvin, porque a constante σ foi definida para a escala absoluta e a temperatura aparece elevada à quarta potência; converta antes de elevar.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.12) e diga o que cada símbolo significa. A quarta potência é o que torna a conversão decisiva.

2 Organizar

Dados $A = 20\,\text{m}^2$
$T = 127\,^\circ\text{C}$
$\varepsilon = 0{,}90$
$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W/(m}^2 \cdot \text{K}^4\text{)}$.

Conversões $T = 127 + 273 = 400\,\text{K}$.

Estratégia eleve a temperatura absoluta à quarta potência e multiplique pelos outros três fatores da Equação (6.12).

3 Resolver

Quarta potência da temperatura absoluta. Com $T = 400\,\text{K}$:

$$\begin{aligned} T^4 &= (400)^4 = (4 \times 10^2)^4 \\ &= 256 \times 10^8 = 2{,}56 \times 10^{10}\,\text{K}^4 \end{aligned}$$

Lei de Stefan-Boltzmann. Multiplique os quatro fatores:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon\,\sigma\,A\,T^4 \\ &= 0{,}90 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 20 \times 2{,}56 \times 10^{10} \\ &= 1{,}02 \times 10^{-6} \times 2{,}56 \times 10^{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{P \approx 2{,}6 \times 10^4\,\text{W} = 26\,\text{kW}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela ordem de grandeza: a 400 K, a parcela σT^4 vale cerca de $1{,}45\,\text{kW/m}^2$, próximo da radiação solar que chega ao solo, e vinte metros quadrados levam isso às dezenas de quilowatts. Perceba a sensibilidade da quarta potência: a 500 K, só 100 °C a mais, a potência subiria para cerca de 64 kW, mais que o dobro. É essa sensibilidade que permite à termografia detectar perda de isolamento à distância e que exige proteção contra radiação perto de fornos e de flares.

Cuidado com a pegadinha: usar 127 no lugar de 400 dá cerca de 0,27 kW, cem vezes menos. Nenhuma outra fórmula do capítulo pune tanto o esquecimento da conversão.

EXEMPLO 6.16 • Identificação dos mecanismos

Identifique o mecanismo predominante de transmissão de calor em cada situação: (a) a chama de um maçarico aquecendo a chapa de aço apoiada acima dela; (b) um aquecedor elétrico aquecendo o ar de uma sala fechada; (c) o Sol aquecendo a superfície da Terra.

1 Compreender

O assunto é a **distinção entre condução, convecção e radiação**, numa questão conceitual.

Objetivo. Dizer, em cada situação, qual dos três mecanismos domina. O que está em jogo é usar um critério único: perguntar o que está se deslocando. Se a energia passa de partícula a partícula sem que a matéria ande, é condução; se quem carrega a energia é uma massa de fluido que se move, é convecção; se a energia atravessa o vácuo, é radiação.

Antes de seguir, releia a Definição 6.11 e diga com suas palavras o que ela afirma. A Definição 6.12 é a outra ponta; a convecção fica entre as duas, com matéria em movimento.

2 Organizar

Dados as três situações descritas.

Conversões nenhuma: a questão é conceitual.

Estratégia para cada caso, siga o caminho da energia da fonte até o destino e verifique se há matéria no caminho e se ela se desloca.

3 Resolver

Caso (a). Os gases quentes da chama sobem e batem na chapa, e essa massa de gás em movimento carrega a maior parte da energia: convecção. A radiação da chama também contribui, e a distribuição do calor dentro da chapa, depois que ela recebe, é condução.

Caso (b). O ar em contato com o aquecedor esquenta, dilata, fica menos denso e sobe, enquanto o ar frio desce para ocupar o lugar. É o movimento do próprio ar que espalha a energia pela sala: convecção natural.

Caso (c). Entre o Sol e a Terra há vácuo, e o vácuo não tem partículas para conduzir nem massa para se deslocar. Sobra um único mecanismo possível: radiação.

(a) convecção, com contribuição de radiação; (b) convecção natural; (c) radiação.

4 Avaliar

Avalie a coerência do critério pelo caso (c), que é o mais decisivo: qualquer resposta que mencione condução ou convecção entre Sol e Terra estaria afirmando que existe matéria no espaço interplanetário. Perceba que na prática os três mecanismos costumam agir juntos, e a questão pede o predominante. Um trocador casco e tubo é o exemplo completo: convecção do fluido quente até a parede do tubo, condução através da parede metálica e convecção da parede para o fluido frio. Reconhecer essa sequência é o que a banca cobra nas questões de trocador.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação (Dutos e Terminais), 2023

Um cilindro longo de um material de condutividade térmica k, comprimento L e raio da seção reta R, está colocado entre uma fonte fria à temperatura T_F e uma fonte quente à temperatura T_Q. O fluxo estacionário de calor que passa por esse cilindro é J_1.

Um outro cilindro, feito de outro material, com condutividade térmica $k/2$, comprimento $4L$ e raio de seção reta $4R$, é colocado entre as mesmas fontes, fria e quente. Para esse segundo cilindro, o fluxo estacionário de calor é J_2.

A relação entre os fluxos estacionários de calor, J_2/J_1, é igual a

(A) 16

(B) 4

(C) 2

(D) 1

(E) 1/2

578HDP

CAPÍTULO

7

Termodinâmica e Máquinas Térmicas

Ninguém ignora que o calor pode ser a causa do movimento, que possui até uma grande potência motriz: as máquinas a vapor, hoje tão espalhadas, são disso uma prova que fala a todos os olhos.

SADI CARNOT

Quanto movimento se pode tirar de uma dada quantidade de calor, e existe um limite? Carnot fez essa pergunta em 1824, no único livro que escreveu, as *Reflexões sobre a Potência Motriz do Fogo* (*Réflexions sur la puissance motrice du feu*), um volume de pouco mais de cem páginas, impresso em Paris às custas do autor e quase sem leitores em vida, e a frase da epígrafe é a primeira linha da resposta. O limite existe, e este capítulo chega a ele. Antes disso, a Primeira Lei faz a contabilidade entre calor, trabalho e energia interna. Depois, a Segunda Lei diz que a conversão nunca é completa, e o rendimento de Carnot é o teto que turbina, caldeira e compressor nenhum ultrapassa.

A **Termodinâmica** estuda as relações entre calor, trabalho e energia interna. Ela continua o cap. 6 num ponto preciso: lá o calor entrava num corpo e saía como temperatura mais alta ou como mudança de fase; aqui ele entra num gás que pode empurrar um êmbolo, e parte da energia sai como trabalho. Toda a Termodinâmica está em administrar essa divisão. A Primeira Lei diz que a soma fecha, nada se perde. A Segunda Lei diz que a divisão nunca é livre: existe

um teto para a fração do calor que vira trabalho, e nenhum avanço de engenharia passa desse teto.

Na indústria de petróleo e gás isso aparece o tempo todo. O gás de reservatório sob pressão e temperatura altas é descrito pela equação de estado; compressores de gasoduto, turbinas de geração em plataforma e os ciclos de refrigeração da liquefação de gás natural são dimensionados pela Primeira Lei e limitados pelo rendimento de Carnot. Uma termelétrica que joga fora mais da metade do calor que consome não está mal projetada: está obedecendo a Segunda Lei.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Aplicar a equação de estado do gás ideal e a equação geral das transformações, sempre com a temperatura em kelvin;
- Relacionar temperatura e energia cinética média das moléculas;
- Identificar e resolver as transformações isotérmica, isobárica, isocórica e adiabática;
- Calcular o trabalho de um gás pela área no diagrama $P \times V$ e reconhecer, pelo sentido do ciclo, se ele é motor ou refrigerador;
- Aplicar a Primeira Lei, $\Delta U = Q - W$, com a convenção de sinais correta;
- Enunciar a Segunda Lei nas formas de Kelvin-Planck e de Clausius e usar a entropia como critério de sentido;
- Calcular o rendimento de uma máquina térmica e o limite de Carnot, e comparar os dois;
- Calcular o coeficiente de performance de refrigeradores e bombas de calor.

7.1 Gás Ideal e Equação de Estado

7.1.1 Hipóteses do modelo

DEFINIÇÃO 7.1 • Gás Ideal

Gás ideal é um modelo em que as moléculas são tratadas como pontos materiais, sem volume próprio, que não exercem força umas sobre as outras exceto no instante da colisão, e cujas colisões são perfeitamente elásticas. Com essas três hipóteses, o comportamento do gás fica descrito por uma única equação, válida para qualquer gás.

NOTA

O modelo descreve bem gases a **baixas pressões** e **altas temperaturas**, situação em que as moléculas ficam distantes umas das outras e as forças de interação realmente pouco importam. Perto do ponto de condensação ou sob pressão muito alta, como no gás de reservatório, o modelo perde precisão e entram equações de estado mais elaboradas, como a de van der Waals. Em prova de nível médio, o enunciado sempre avisa que o gás é ideal ou perfeito.

7.1.2 Equação de estado

DEFINIÇÃO 7.2 • Lei dos Gases Ideais

A **equação de estado do gás ideal** amarra as quatro grandezas que descrevem uma amostra de gás: pressão, volume, quantidade de matéria e temperatura absoluta. Fixadas três delas, a quarta está determinada.

$$P V = n R T \tag{7.1}$$

P: pressão do gás (Pa)
V: volume ocupado (m^3)
n: quantidade de matéria (mol)
R: constante universal dos gases ($\mathrm{J/(mol \cdot K)}$)
T: temperatura absoluta (K)

CUIDADO

Temperatura em **kelvin** em toda equação de gás. Um enunciado que dá $27\,^{\circ}\mathrm{C}$ está dando $300\,\mathrm{K}$; usar o 27 erra por mais de um fator dez. É a armadilha mais frequente do capítulo.

A constante R tem duas formas, e cada uma exige o seu sistema de unidades: $R = 8{,}314\,\mathrm{J/(mol \cdot K)}$ pede pressão em pascal e volume em metro cúbico; $R = 0{,}082\,\mathrm{atm \cdot L/(mol \cdot K)}$ pede pressão em atmosfera e volume em litro. Escolha uma das duas pelo que o enunciado oferece e não misture os dois sistemas na mesma conta.

Quando a quantidade de gás não muda, n e R são os mesmos nos dois estados. Escrevendo a Equação (7.1) antes e depois e dividindo uma pela outra, n e R desaparecem e sobra uma relação que dispensa saber quantos mols existem.

DEFINIÇÃO 7.3 • Equação Geral das Transformações

Para uma massa fixa de gás ideal que passa de um estado 1 para um estado 2, a razão entre o produto pressão vezes volume e a temperatura absoluta se conserva. É a equação que resolve qualquer transformação em que P, V e T mudam ao mesmo tempo.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \tag{7.2}$$

P_1, V_1, T_1: pressão, volume e temperatura no estado inicial
P_2, V_2, T_2: pressão, volume e temperatura no estado final

Essa forma vale só com a massa de gás constante. Se o enunciado disser que gás foi injetado ou retirado, volte à Equação (7.1) completa, onde n aparece e pode mudar.

EXEMPLO 7.1 • Volume de um cilindro de gás industrial

Um cilindro contém 2,0 mol de gás a 27,0 °C e 15,0 atm. Determine o volume ocupado pelo gás, em litros.

1 Compreender

O assunto é a **equação de estado do gás ideal**: três das quatro grandezas estão dadas e a quarta é a incógnita.

Objetivo. Obter o volume que esses dois mols ocupam nessas condições, em litros. O que está em jogo é duas providências antes da conta: a temperatura em kelvin, porque a equação não aceita Celsius, e o valor de R compatível com as unidades do enunciado, que aqui são atmosfera e litro.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.1) e diga o que cada símbolo significa. Com pressão em atmosfera e volume em litro, o R certo é o de 0,082.

2 Organizar

Dados $n = 2{,}0\,\text{mol}$
$\theta = 27{,}0\,^\circ\text{C}$
$P = 15{,}0\,\text{atm}$
$R = 0{,}082\,\text{atm}\cdot\text{L/(mol}\cdot\text{K)}$.

Conversões $T = 27{,}0 + 273 = 300\,\text{K}$.

Estratégia isole V na Equação (7.1).

3 Resolver

Volume pela equação de estado. Isole V e substitua:

$$\begin{aligned} V &= \frac{nRT}{P} \\ &= \frac{2{,}0 \times 0{,}082 \times 300}{15{,}0} \\ &= \frac{49{,}2}{15{,}0} \end{aligned}$$

$$V = 3{,}3\,\text{L}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: nas condições normais, um mol de gás ocupa cerca de 22,4 L, então dois mols a 1 atm ocupariam perto de 45 L. A 15 atmosferas, esse volume tem de encolher quinze vezes, o que dá cerca de 3 L. Confere. É exatamente esse o ganho de guardar gás sob pressão: o mesmo cilindro leva quinze vezes mais gás do que levaria à pressão ambiente, e é por isso que cilindros industriais são projetados para dezenas ou centenas de atmosferas.

Cuidado com a pegadinha: usar 27 no lugar de 300 daria $V = 0{,}30\,\text{L}$, um décimo do valor certo. Escreva a conversão para kelvin numa linha separada, antes de substituir.

EXEMPLO 7.2 • Transformação entre dois estados

Um cilindro com êmbolo contém gás a $P_1 = 2{,}0\,\text{atm}$, $V_1 = 5{,}0\,\text{L}$ e $T_1 = 300\,\text{K}$. O êmbolo é empurrado enquanto o gás é aquecido, e o estado final tem $P_2 = 5{,}0\,\text{atm}$ e $T_2 = 600\,\text{K}$. Determine o volume final.

1 Compreender

O assunto é a **equação geral das transformações**: as três grandezas mudam ao mesmo tempo e nenhuma fica constante, então não é isotérmica, nem isobárica, nem isocórica.

Objetivo. Obter o volume ao final das duas mudanças combinadas. O que está em jogo é reconhecer o caso geral e a massa fixa: como o enunciado não fala em injetar ou retirar gás, n é o mesmo nos dois estados e some da equação.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.2) e diga o que cada símbolo significa. As temperaturas já vêm em kelvin.

2 Organizar

Dados estado 1 com $P_1 = 2{,}0\,\text{atm}$, $V_1 = 5{,}0\,\text{L}$, $T_1 = 300\,\text{K}$
estado 2 com $P_2 = 5{,}0\,\text{atm}$, $T_2 = 600\,\text{K}$.

Conversões nenhuma: as temperaturas já estão em kelvin, e pressão e volume só aparecem em razão.

Estratégia escreva a equação geral, isole V_2 e substitua. As unidades de pressão e volume podem ficar como estão, porque aparecem dos dois lados da igualdade.

3 Resolver

Equação geral. Escreva-a e isole o volume final:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$
$$V_2 = \frac{P_1\, V_1\, T_2}{T_1\, P_2}$$

Volume final. Substitua os valores:

$$V_2 = \frac{2{,}0 \times 5{,}0 \times 600}{300 \times 5{,}0}$$
$$= \frac{6\,000}{1\,500}$$

$$\boxed{V_2 = 4{,}0\,\text{L}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência olhando os dois efeitos em separado. A temperatura dobrou, o que sozinho dobraria o volume; a pressão aumentou 2,5 vezes, o que sozinho dividiria o volume por 2,5. O resultado combinado é $5{,}0 \times 2/2{,}5 = 4{,}0\,\text{L}$, uma contração leve, porque o efeito da pressão foi maior que o da temperatura. Em vaso de pressão e em duto, é essa mesma equação que relaciona a pressão medida no instrumento com a temperatura do produto, e é por isso que os dois valores são registrados juntos.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2011
Um gás ideal contido em um cilindro está a 10 °C. Um pistão comprime esse gás de tal modo que seu volume fique 1/3 do original e sua pressão seja cinco vezes maior.
A temperatura final do gás será, aproximadamente,

(A) 16,7 °C
(B) 16,7 K
(C) 472 K
(D) 472 °C
(E) 150 °C

6ZKR86

7.1.3 Temperatura e energia cinética das moléculas

DEFINIÇÃO 7.4 • Interpretação Cinética da Temperatura

A **teoria cinética dos gases** mostra o que a temperatura é por dentro: ela mede a energia cinética média de translação das moléculas. Dois gases diferentes à mesma temperatura têm moléculas com a mesma energia cinética média, ainda que as mais pesadas se movam mais devagar.

$$\overline{E_c} = \frac{3}{2} k_B T \qquad \text{e, para } n \text{ mols,} \qquad E_c = \frac{3}{2} n R T \tag{7.3}$$

$\overline{E_c}$: energia cinética média de uma molécula (J)
E_c: energia cinética total de translação da amostra (J)
k_B: constante de Boltzmann, $1{,}38 \times 10^{-23}$ (J/K)
n: quantidade de matéria (mol)
T: temperatura absoluta (K)

7.2 Transformações Gasosas

Quando uma das grandezas de estado fica constante, a equação geral se reduz a uma relação mais simples entre as outras duas. São quatro casos, e a primeira coisa a fazer em qualquer questão é identificar qual deles o enunciado descreve. A palavra que denuncia o caso quase sempre está lá: “lentamente” e “em banho térmico” apontam para a isotérmica, “êmbolo livre” para a isobárica, “recipiente rígido” para a isocórica, “isolado termicamente” ou “rápido” para a adiabática.

7.2.1 Transformação isotérmica

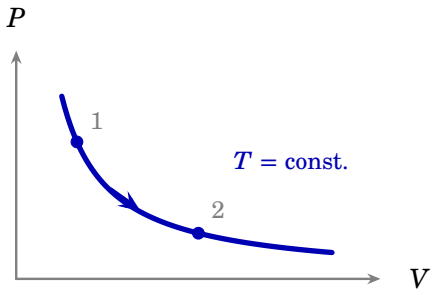
DEFINIÇÃO 7.5 • Lei de Boyle-Mariotte

Na **transformação isotérmica** a temperatura fica constante. Como o produto PV é proporcional a T, ele também fica constante: comprimir o gás aumenta a pressão na mesma proporção em que o volume diminui.

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \qquad (T = \text{const.}) \tag{7.4}$$

P_1, P_2: pressões inicial e final (Pa ou atm)
V_1, V_2: volumes inicial e final (m^3 ou L)

No diagrama $P \times V$ a isoterma é uma **hipérbole**. O trabalho, que é a área sob a curva, vale $W = nRT\ln(V_2/V_1)$.



1 → 2: expansão isotérmica

Figura 7.1

7.2.2 Transformação isobárica

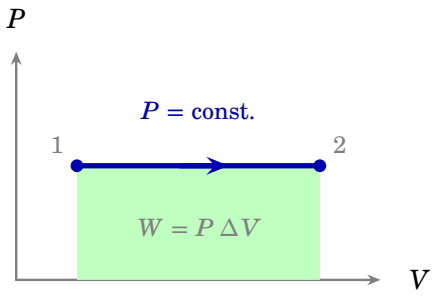
DEFINIÇÃO 7.6 • Transformação isobárica

Na **transformação isobárica** a pressão fica constante, situação de um gás sob êmbolo livre, que se acomoda para igualar a pressão externa. O volume passa a ser diretamente proporcional à temperatura absoluta.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \qquad (P = \text{const.}) \tag{7.5}$$

V_1, V_2: volumes inicial e final (m^3)
T_1, T_2: temperaturas absolutas inicial e final (K)

No diagrama $P \times V$ a isobárica é um segmento **horizontal**, e a área sob ele é um retângulo: $W = P\,\Delta V$.



1 → 2: expansão isobárica W: trabalho do gás

Figura 7.2

7.2.3 Transformação isocórica

DEFINIÇÃO 7.7 • Transformação isocórica

Na **transformação isocórica**, também chamada isovolumétrica, o volume fica constante, situação de um vaso rígido e fechado. A pressão passa a ser diretamente proporcional à temperatura absoluta.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \qquad (V = \text{const.}) \tag{7.6}$$

P_1, P_2: pressões inicial e final (Pa)
T_1, T_2: temperaturas absolutas inicial e final (K)

NOTA

Os livros divergem nos nomes destas duas leis. A convenção internacional chama a isobárica de Lei de Charles e a isocórica de Lei de Gay-Lussac; parte dos livros brasileiros troca os dois nomes. Guarde a grandeza que fica constante, não o nome do cientista: é isso que a prova cobra.

No diagrama $P \times V$ a isocórica é um segmento **vertical**. Como o volume não varia, não há área sob a curva e o gás não realiza trabalho: $W = 0$.

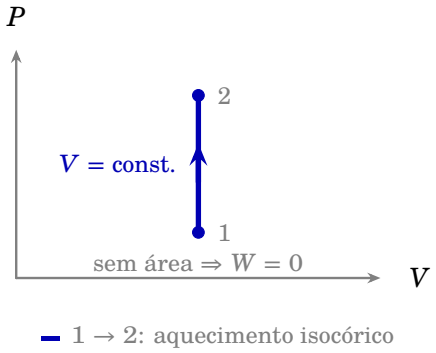


Figura 7.3

7.2.4 Transformação adiabática

DEFINIÇÃO 7.8 • Transformação Adiabática

Na **transformação adiabática** não há troca de calor com a vizinhança, $Q = 0$. Isso acontece quando o sistema está isolado termicamente ou quando o processo é rápido demais para dar tempo de trocar calor, caso da compressão num cilindro de motor.

$$P V^{\gamma} = \text{const.} \qquad \text{e} \qquad T V^{\gamma - 1} = \text{const.} \tag{7.7}$$

γ: coeficiente de Poisson, C_P/C_V (–)
P: pressão do gás (Pa)
V: volume ocupado (m^3)

T: temperatura absoluta (K)

Para gases diatômicos, que é o caso do ar, do nitrogênio e do oxigênio, $\gamma = 1{,}4$. Para gases monoatômicos, $\gamma \approx 1{,}67$.

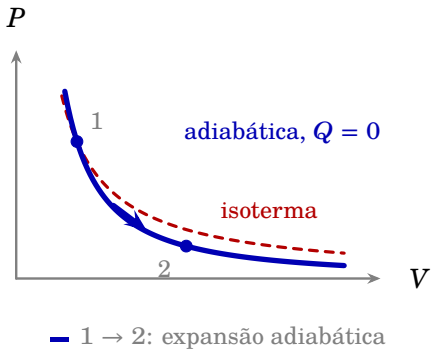


Figura 7.4

No diagrama $P \times V$ a adiabática é mais inclinada que a isoterma que passa pelo mesmo ponto, porque nela a pressão cai por dois motivos ao mesmo tempo: o volume aumenta e a temperatura também cai. Daí as duas consequências que a banca cobra: numa **expansão adiabática** o gás esfria, já que só pode realizar trabalho às custas da própria energia interna, e numa **compressão adiabática** o gás esquenta. O motor diesel usa a segunda: a compressão sozinha leva o ar a temperatura suficiente para inflamar o combustível, sem vela de ignição.

7.2.5 As quatro transformações lado a lado

Transformação	Constante	Relação	Trabalho
Isotérmica	T	$P_1V_1 = P_2V_2$	$nRT\ln(V_2/V_1)$
Isobárica	P	$V_1/T_1 = V_2/T_2$	$P\,\Delta V$
Isocórica	V	$P_1/T_1 = P_2/T_2$	0
Adiabática	$Q = 0$	$PV^\gamma = \text{const.}$	$-\Delta U$

EXEMPLO 7.3 • Compressão isotérmica

Um recipiente com êmbolo contém gás a $P_1 = 1{,}5\,\text{atm}$ e $V_1 = 4{,}0\,\text{L}$. O êmbolo é empurrado lentamente, em banho térmico, de modo que a temperatura não varia, até que o volume seja $V_2 = 1{,}5\,\text{L}$. Determine a pressão final.

1 COMPREENDER

O assunto é a **transformação isotérmica**.

Objetivo. Obter a pressão a que o gás chega ao ser comprimido a pouco mais de um terço do volume. O que está em jogo é ler no

enunciado o sinal da isotérmica: “em banho térmico” e “lentamente” dizem que a temperatura tem tempo de se equalizar com a vizinhança e fica constante.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.4) e diga o que cada símbolo significa. O produto pressão vezes volume é o mesmo antes e depois.

2 Organizar

Dados $P_1 = 1{,}5\,\text{atm}$
$V_1 = 4{,}0\,\text{L}$
$V_2 = 1{,}5\,\text{L}$.

Conversões nenhuma: pressão e volume só aparecem em razão.

Estratégia aplique a Equação (7.4) e isole P_2. As unidades de pressão e volume podem permanecer como estão.

3 Resolver

Lei de Boyle-Mariotte. Escreva-a e isole a pressão final:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$
$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2}$$

Pressão final. Substitua os valores:

$$P_2 = \frac{1{,}5 \times 4{,}0}{1{,}5} = \frac{6{,}0}{1{,}5}$$

$$\boxed{P_2 = 4{,}0\,\text{atm}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o volume caiu para 1,5/4,0, ou seja, pouco mais de um terço do inicial, e a pressão subiu na razão inversa, de 1,5 para 4,0 atm, que é 2,7 vezes. Confira pelo produto: $1{,}5 \times 4{,}0 = 6{,}0$ e $4{,}0 \times 1{,}5 = 6{,}0$, iguais, como a lei exige. Compressão lenta e resfriada é o modelo de compressor com resfriamento intermediário, usado justamente porque comprimir a temperatura baixa consome menos trabalho do que comprimir a quente.

EXEMPLO 7.4 • Aquecimento isobárico

Um cilindro fechado por um êmbolo livre contém gás ideal. O volume inicial é $V_1 = 4{,}0\,\text{L}$ a $T_1 = 300\,\text{K}$. O gás é aquecido e o volume passa a $V_2 = 6{,}0\,\text{L}$. Determine a temperatura final.

1 Compreender

O assunto é a **transformação isobárica**.

Objetivo. Obter a temperatura a que o gás precisa chegar para ocupar 6,0 L. O que está em jogo é reconhecer a isobárica pelo êmbolo livre, que desliza até a pressão do gás igualar a externa, e lembrar que a proporcionalidade entre volume e temperatura só vale na escala absoluta.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.5) e diga o que cada símbolo significa. Volume e temperatura absoluta são diretamente proporcionais.

2 Organizar

Dados $V_1 = 4{,}0\,\text{L}$
$T_1 = 300\,\text{K}$
$V_2 = 6{,}0\,\text{L}$
pressão constante.

Conversões nenhuma: a temperatura já está em kelvin.

Estratégia aplique a Equação (7.5) e isole T_2.

3 Resolver

Lei da isobárica. Escreva-a e isole a temperatura final:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1}$$

Temperatura final. Substitua os valores:

$$T_2 = 300 \times \frac{6{,}0}{4{,}0}$$

$$= 300 \times 1{,}5$$

$$\boxed{T_2 = 450\,\text{K}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o volume aumentou 50 % e a temperatura absoluta também, de 300 para 450 K, exatamente a proporcionalidade que a lei prevê. Repare que 450 K correspondem a 177 °C, e que a mesma conta feita em Celsius daria um resultado errado, porque 30 não é $1{,}5 \times 27$. Processos isobáricos aparecem sempre que o gás está aberto para um ambiente de pressão fixa, como um gasômetro de selo d'água ou um trecho de linha com a saída livre.

Cuidado com a pegadinha: a proporcionalidade entre volume e temperatura só existe na escala absoluta. Nenhuma das leis dos gases funciona com temperatura em Celsius.

> **EXEMPLO 7.5** • Compressão adiabática num motor diesel
>
> Um cilindro contém 500 cm^3 de ar a 27,0 °C e 1,0 atm. O êmbolo comprime o ar adiabaticamente até $V_2 = 25\,\text{cm}^3$. Determine a temperatura final. Use $\gamma = 1{,}4$ e $20^{0,4} \approx 3{,}31$.

1 **Compreender**

O assunto é a **transformação adiabática**: a compressão no cilindro de um motor é rápida demais para haver troca de calor apreciável com as paredes, e por isso $Q = 0$.

Objetivo. Obter a temperatura que o ar atinge ao ser comprimido a um vinte avos do volume inicial. O que está em jogo é escolher a forma certa da relação adiabática: como o enunciado dá volumes e pede temperatura, a útil é a que liga T a V.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.7) e diga o que cada símbolo significa. A segunda forma, $TV^{\gamma-1} = \text{const.}$, é a que se usa aqui.

2 **Organizar**

Dados $V_1 = 500\,\text{cm}^3$
$\theta_1 = 27{,}0\,^\circ\text{C}$
$V_2 = 25\,\text{cm}^3$
$\gamma = 1{,}4$.

Conversões $T_1 = 27{,}0 + 273 = 300\,\text{K}$.

Estratégia escreva $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$, isole T_2 e calcule a razão de volumes elevada a $\gamma - 1 = 0{,}4$. As unidades de volume podem ficar em centímetro cúbico, porque só aparece a razão entre elas.

3 Resolver

Relação adiabática entre T e V. Escreva-a e isole T_2:

$$T_1\,V_1^{\gamma-1} = T_2\,V_2^{\gamma-1}$$
$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

Razão de compressão e temperatura final. Calcule a razão e eleve ao expoente 0,4:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{500}{25} = 20$$
$$T_2 = 300 \times 20^{0,4}$$
$$= 300 \times 3{,}31$$

$$T_2 \approx 993\,\text{K} \approx 720\,^\circ\text{C}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o gás foi comprimido e não pôde perder calor, então tinha de esquentar bastante, e esquentou mais de três vezes em temperatura absoluta. Repare que numa compressão isotérmica de mesma razão a temperatura ficaria em 300 K; a diferença inteira é a energia do trabalho de compressão que ficou guardada no gás. Esses 720 °C passam com folga do ponto de autoignição do diesel, em torno de 250 °C, e é por isso que o motor diesel não tem vela. Motores a gasolina não podem usar razão de compressão tão alta, sob pena de a mistura inflamar antes da hora.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Um gás ideal, ao receber calor de uma fonte térmica, executa um processo isotérmico no qual sua pressão final é 5 vezes maior do que a pressão inicial.

Qual o volume e a temperatura finais do gás nesse processo?

(A) $V_{final} = V_{inicial}$ e $T_{final} = T_{inicial}$
(B) $V_{final} = 5\,V_{inicial}$ e $5\,T_{final} = T_{inicial}$
(C) $5\,V_{final} = V_{inicial}$ e $T_{final} = 5\,T_{inicial}$
(D) $V_{final} = 5\,V_{inicial}$ e $T_{final} = T_{inicial}$
(E) $5\,V_{final} = V_{inicial}$ e $T_{final} = T_{inicial}$

69YCHF

7.3 Primeira Lei da Termodinâmica

7.3.1 Energia interna, calor e trabalho

DEFINIÇÃO 7.9 • Energia Interna

A **energia interna** de um sistema é a soma de todas as energias microscópicas que ele guarda: a energia de agitação das partículas e a energia das interações entre elas. Num gás ideal não há interação, então sobra só a agitação, e a energia interna passa a depender apenas da temperatura.

$$U = \frac{f}{2} n R T \qquad \text{e portanto} \qquad \Delta U = \frac{f}{2} n R \Delta T \qquad (7.8)$$

U: energia interna do gás (J)
f: graus de liberdade: 3 monoatômico, 5 diatômico (−)
n: quantidade de matéria (mol)
T: temperatura absoluta (K)

DICA

Num gás ideal, ΔU tem sempre o mesmo sinal de ΔT. Se a temperatura não mudou, a energia interna não mudou, não importa quanto calor entrou ou saiu.

O **calor** e o **trabalho** não são propriedades do sistema: são as duas formas pelas quais energia atravessa a fronteira dele. O gás não "tem" calor nem "tem" trabalho; ele tem energia interna, e o calor e o trabalho são os caminhos de entrada e de saída. O trabalho de um gás que se expande ou se comprime é a área sob a curva no diagrama $P \times V$.

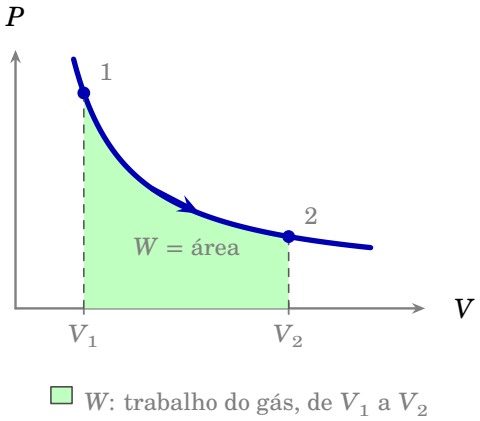


Figura 7.5

DEFINIÇÃO 7.10 • Trabalho de um Gás

O **trabalho** realizado por um gás é a área entre a curva do processo e o eixo dos volumes, no diagrama $P \times V$. Quando a pressão é constante, essa área é um retângulo e o cálculo é imediato.

$$W = P\,\Delta V \qquad (P = \text{const.}) \tag{7.9}$$

W: trabalho realizado pelo gás (J)
P: pressão, constante no processo (Pa)
ΔV: variação de volume, $V_2 - V_1$ (m^3)

Na isotérmica, $W = nRT\ln(V_2/V_1)$; na isocórica, $W = 0$, porque não há área nenhuma sob um segmento vertical.

Num **ciclo fechado** a área *interna* à curva é o trabalho líquido de uma volta completa, e o sentido do percurso dá o sinal. Ciclo **horário**: trabalho positivo, o sistema entrega trabalho, é uma máquina térmica. Ciclo **anti-horário**: trabalho negativo, o sistema consome trabalho, é um refrigerador. Nas questões que trazem um gráfico $P \times V$ com um ciclo, ler o sentido antes de calcular qualquer coisa elimina metade das alternativas.

ATENÇÃO

Convenção de sinais adotada neste livro, que é a das provas de nível médio:

- $Q > 0$: o gás **recebe** calor;
- $Q < 0$: o gás **cede** calor;
- $W > 0$: o gás **realiza** trabalho, ou seja, se expande;
- $W < 0$: o gás **recebe** trabalho, ou seja, é comprimido.

7.3.2 O enunciado da Primeira Lei

DEFINIÇÃO 7.11 • Primeira Lei da Termodinâmica

A **Primeira Lei da Termodinâmica** é a conservação de energia escrita para sistemas que trocam calor e trabalho: a variação da energia interna é o que sobra do calor recebido depois de descontado o trabalho realizado pelo sistema.

$$\Delta U = Q - W \tag{7.10}$$

ΔU: variação da energia interna (J)
Q: calor trocado, positivo quando recebido (J)
W: trabalho, positivo quando realizado pelo gás (J)

NOTA

Parte da literatura escreve $\Delta U = Q + W$, com W sendo o trabalho realizado *sobre* o sistema. É a mesma física com outro nome para a letra. A Cesgranrio usa a forma adotada aqui, mas leia o enunciado antes de aplicar o sinal.

7.3.3 A Primeira Lei nas quatro transformações

Transformação	W	Q	ΔU
Isotérmica	$nRT\ln(V_2/V_1)$	$= W$	0
Isobárica	$P\,\Delta V$	$\Delta U + W$	$\neq 0$
Isocórica	0	$= \Delta U$	$= Q$
Adiabática	$-\Delta U$	0	$-W$
Ciclo completo	$= Q_{\text{total}}$	$= W_{\text{total}}$	0

EXEMPLO 7.6 • Aquecimento em vaso rígido

Um cilindro rígido contém 2,0 mol de gás ideal diatômico a 300 K. O gás recebe 2 500 J de calor. Determine a variação da energia interna e a temperatura final. ($R = 8{,}314\,\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$; gás diatômico, $f = 5$)

1 Compreender

O assunto é a **Primeira Lei numa transformação isocórica**.

Objetivo. Obter de quanto sobe a energia interna e até que temperatura o gás chega. O que está em jogo é a palavra "rígido": o volume não pode mudar, o gás não desloca fronteira nenhuma e não realiza trabalho, então toda a energia recebida fica guardada como agitação das moléculas.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.10) e diga o que cada símbolo significa. Com $W = 0$ ela se reduz a $\Delta U = Q$; a Equação (7.8) converte essa energia em temperatura.

2 Organizar

Dados $n = 2{,}0\,\text{mol}$
$T_1 = 300\,\text{K}$
$Q = 2\,500\,\text{J}$
$W = 0$
$f = 5$
$R = 8{,}314\,\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$.

Conversões nenhuma: tudo no SI e a temperatura em kelvin.

Estratégia aplique a Equação (7.10) com $W = 0$ para achar ΔU e depois a Equação (7.8) para converter essa energia em variação de temperatura.

3 **Resolver**

Primeira Lei com $W = 0$. Aplique-a:

$$\begin{aligned}\Delta U &= Q - W \\ &= 2\,500 - 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta U = 2\,500\,\text{J} = 2{,}5\,\text{kJ}}$$

Variação de temperatura. Converta a energia interna em temperatura:

$$\begin{aligned}\Delta U &= \frac{f}{2}\,n\,R\,\Delta T \\ \Delta T &= \frac{2\,\Delta U}{f\,n\,R} \\ &= \frac{2 \times 2\,500}{5 \times 2{,}0 \times 8{,}314} \\ &= \frac{5\,000}{83{,}14} \approx 60\,\text{K}\end{aligned}$$

Temperatura final. Some à temperatura inicial:

$$\begin{aligned}T_2 &= T_1 + \Delta T \\ &= 300 + 60\end{aligned}$$

$$\boxed{T_2 = 360\,\text{K}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: como não houve trabalho, cem por cento do calor virou energia interna, e a temperatura subiu. O aumento de 60 K sobre 300 K é uma razão de 1,2, e como o volume é constante a pressão sobe na mesma razão: $P_2 = 1{,}2\,P_1$. Esse resultado é a base do dimensionamento de válvulas de alívio: vaso fechado que recebe calor sobe de pressão sem nenhuma folga, porque não há para onde o gás se expandir.

> **EXEMPLO 7.7** • Expansão isotérmica
>
> Meio mol de gás ideal se expande isotermicamente a 400 K, passando de $V_1 = 2{,}0\,\text{L}$ para $V_2 = 8{,}0\,\text{L}$. Determine o trabalho realizado pelo gás e o calor absorvido. ($R = 8{,}314\,\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$; $\ln 4 \approx 1{,}386$)

1 Compreender

O assunto é a **Primeira Lei numa transformação isotérmica**.

Objetivo. Obter o trabalho que o gás realiza ao quadruplicar de volume e o calor que ele precisou absorver para isso. O que está em jogo é ver que, como a temperatura não muda e a energia interna de um gás ideal só depende dela, $\Delta U = 0$ e o calor que entra sai inteiro como trabalho: basta calcular um dos dois.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.10) e diga o que cada símbolo significa. O trabalho da isotérmica é $W = nRT\ln(V_2/V_1)$, a área sob a hipérbole.

2 Organizar

Dados $n = 0{,}50\,\text{mol}$
$T = 400\,\text{K}$
$V_1 = 2{,}0\,\text{L}$
$V_2 = 8{,}0\,\text{L}$, logo $V_2/V_1 = 4$
$R = 8{,}314\,\text{J/(mol}\cdot\text{K)}$.

Conversões nenhuma: os volumes só aparecem em razão, e a temperatura já está em kelvin.

Estratégia calcule W pela expressão do trabalho na isotérmica e conclua Q pela Primeira Lei com $\Delta U = 0$.

3 Resolver

Trabalho da isotérmica. Calcule-o:

$$\begin{aligned} W &= n\,R\,T\,\ln\!\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ &= 0{,}50 \times 8{,}314 \times 400 \times \ln 4 \\ &= 1\,662{,}8 \times 1{,}386 \end{aligned}$$

$$\boxed{W \approx 2{,}3\,\text{kJ}}$$

Primeira Lei com $\Delta U = 0$. A temperatura não mudou:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \\ Q &= \Delta U + W = W \end{aligned}$$

$$\boxed{Q \approx 2{,}3\,\text{kJ}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o gás se expandiu, então o trabalho tinha de sair positivo, e saiu. E como a temperatura ficou fixa, o calor absorvido tinha de ser exatamente igual ao trabalho, sem sobra para a energia interna. Perceba que a razão de volumes entra dentro de um logaritmo, e por isso quadruplicar o volume não quadruplica o trabalho: multiplica por $\ln 4 \approx 1{,}39$ o valor de nRT. Compressores com resfriamento entre os estágios se aproximam do processo isotérmico justamente porque ele exige menos trabalho do que o adiabático para a mesma razão de pressões.

> **EXEMPLO 7.8** • Dois processos em sequência
>
> Um gás ideal passa por dois processos sucessivos. No primeiro, isocórico, ele recebe 800 J de calor. No segundo, isobárico, absorve 700 J de calor e realiza 300 J de trabalho. Determine a variação total da energia interna do gás.

1 **Compreender**

O assunto é a **Primeira Lei aplicada em etapas**.

Objetivo. Obter quanta energia ficou guardada no gás, somadas as duas etapas. O que está em jogo é o ponto conceitual: a energia interna é função de estado, depende só de onde o gás está e não do caminho, e por isso as variações de cada etapa simplesmente se somam. Calor e trabalho não são funções de estado, mas cada etapa tem os seus.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.10) e diga o que cada símbolo significa. Uma vez por etapa.

2 **Organizar**

Dados etapa 1 isocórica com $Q_1 = 800\,\text{J}$ e $W_1 = 0$
etapa 2 isobárica com $Q_2 = 700\,\text{J}$ e $W_2 = 300\,\text{J}$.

Conversões nenhuma: tudo em joule.

Estratégia aplique a Equação (7.10) em cada etapa e some as duas variações.

3 **Resolver**

Etapa isocórica. O trabalho é nulo:

$$\begin{aligned}\Delta U_1 &= Q_1 - W_1 \\ &= 800 - 0 = 800\,\text{J}\end{aligned}$$

Etapa isobárica. O gás se expande e realiza trabalho:

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= Q_2 - W_2 \\ &= 700 - 300 = 400\,\text{J}\end{aligned}$$

Variação total. Some as duas:

$$\begin{aligned}\Delta U_{\text{total}} &= \Delta U_1 + \Delta U_2 \\ &= 800 + 400\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta U_{\text{total}} = 1\,200\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo balanço global: entraram 1 500 J de calor, saíram 300 J como trabalho, e sobraram 1 200 J dentro do gás. A conta fecha, como a conservação de energia exige. Perceba que a diferença entre o calor total absorvido e o aumento da energia interna é exatamente o trabalho realizado, e nada mais.

Cuidado com a pegadinha: responder 1 500 J é somar os calores e esquecer o trabalho. Calor recebido não é variação de energia interna, exceto quando o trabalho é nulo, que é o caso da primeira etapa e não o da segunda.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Um cilindro, fechado por um êmbolo, encerra o volume de 1,0 litro de um gás ideal à pressão de $2{,}5 \times 10^5$ Pa. Quando o sistema recebe de uma fonte quente 300 J de calor, o êmbolo desloca-se sem atrito, de modo que o volume do gás seja duplicado em um processo termodinâmico, o qual pode ser considerado isobárico. Nesse caso, a energia interna do gás sofreu uma variação, em joules, equivalente a

(A) 50
(B) 100
(C) 150
(D) 250
(E) 550

QKRXMW

7.4 Segunda Lei da Termodinâmica

A Primeira Lei diz que a energia se conserva, mas não diz para que lado as coisas acontecem. Uma xícara de café que esquenta sozinha enquanto a cozinha esfria conservaria a energia perfeitamente, e mesmo assim não acontece. A **Segunda Lei da Termodinâmica** é a lei que dá sentido aos processos: ela diz o que a natureza faz sozinha e o que só acontece pagando trabalho.

7.4.1 Os dois enunciados clássicos

DEFINIÇÃO 7.12 • Enunciado de Kelvin-Planck

É impossível construir uma máquina que opere em ciclos e cujo **único** efeito seja retirar calor de uma fonte e convertê-lo integralmente em trabalho. Alguma parcela do calor tem sempre de ser rejeitada para uma fonte mais fria.

DEFINIÇÃO 7.13 • Enunciado de Clausius

É impossível construir um dispositivo que opere em ciclos e cujo **único** efeito seja transferir calor de um corpo frio para um corpo quente. O calor sobe de temperatura apenas quando há trabalho sendo pago para isso.

NOTA

Os dois enunciados são equivalentes: violar um permite violar o outro. A palavra "único" é o que dá peso aos dois. Refrigeradores tiram calor do frio e o entregam ao quente todo dia, mas não como *único* efeito: consomem energia elétrica.

7.4.2 Entropia

DEFINIÇÃO 7.14 • Entropia

A **entropia** é a grandeza que mede o quanto a energia de um sistema está espalhada, ou seja, indisponível para virar trabalho. Ela é função de estado, e a Segunda Lei em forma quantitativa diz que a entropia do universo nunca diminui: processos reversíveis a mantêm constante e todo processo real a aumenta.

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \qquad \text{(processo reversível a } T \text{ constante)} \qquad (7.11)$$

ΔS: variação de entropia (J/K)
Q: calor trocado, com sinal (J)
T: temperatura absoluta em que a troca ocorre (K)

DICA

O mesmo calor produz mais entropia quando entra numa temperatura baixa, porque T está no denominador. Por isso o calor passa sozinho do quente para o frio: o quente perde Q/T_Q e o frio ganha Q/T_F, que é maior.

EXEMPLO 7.9 • Geladeira de porta aberta

Alguém propõe refrescar uma cozinha fechada deixando a porta da geladeira aberta e o aparelho ligado. Explique, pela Segunda Lei, o que acontece com a temperatura da cozinha depois de algumas horas.

1 Compreender

O assunto é o **enunciado de Clausius** junto com a Primeira Lei, numa questão conceitual.

Objetivo. Decidir se, com a porta aberta, a cozinha ganha ou perde energia. O que está em jogo é escolher o sistema certo: a tentação é olhar só para o ar frio que sai da geladeira, e o caminho é olhar para a cozinha inteira e perguntar o que atravessa a fronteira dela.

Antes de seguir, releia a Definição 7.13 e diga com suas palavras o que ela afirma. A Equação (7.10) faz o balanço.

2 Organizar

Dados cozinha fechada, geladeira ligada com a porta aberta.

Conversões nenhuma: a questão é conceitual.

Estratégia faça o balanço de energia da cozinha como um todo, em vez de olhar separadamente o ar frio do compartimento e o ar quente da serpentina de trás.

3 Resolver

Primeira Lei na geladeira. Ela retira um calor Q_F de dentro do compartimento e joga um calor Q_Q pela serpentina traseira, para o mesmo ambiente. Pela Primeira Lei, essas duas quantidades não são iguais:

$$Q_Q = Q_F + W$$

onde W é o trabalho elétrico consumido pelo compressor.

Balanço da cozinha. Com a porta aberta, o compartimento e a cozinha são o mesmo ambiente, então o Q_F retirado volta para a cozinha junto com o Q_Q despejado. O balanço fica:

$$\begin{aligned} Q_{\text{líquido}} &= Q_Q - Q_F \\ &= W \end{aligned}$$

A energia que sobra na cozinha é exatamente o trabalho elétrico consumido pelo compressor.

A cozinha *esquenta*. A geladeira não destrói calor, apenas o transporta, e ainda acrescenta ao ambiente toda a energia elétrica que consome.

4 Avaliar

Avalie a coerência pelas duas leis: a cozinha é fechada e recebe energia elétrica, então, se ela esfriasse, energia estaria desaparecendo, o que a Primeira Lei proíbe; e o enunciado de Clausius explica por que a geladeira precisa dessa energia, já que o calor só passa do compartimento frio para a serpentina quente com trabalho pago. Perceba que um ar-condicionado é a mesma máquina, e funciona apenas porque a serpentina quente fica *fora* da sala: é a fronteira que muda, não o princípio. O mesmo raciocínio explica por que a sala de máquinas de uma unidade de refrigeração é sempre o ponto mais quente da planta.

7.5 Máquinas Térmicas e Ciclo de Carnot

DEFINIÇÃO 7.15 • Máquina Térmica

Uma **máquina térmica** é um dispositivo que opera em ciclos, retirando um calor Q_Q de uma fonte quente, convertendo parte dele em trabalho W e rejeitando o restante, Q_F, para uma fonte fria. Como ela volta ao estado inicial a cada ciclo, a energia interna não varia, e a Primeira Lei se resume a $W = Q_Q - Q_F$.

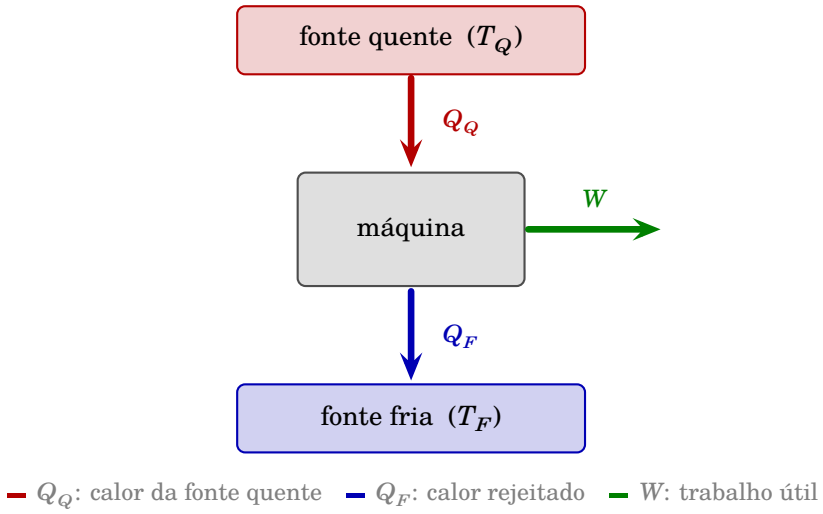


Figura 7.6

7.5.1 Rendimento

DEFINIÇÃO 7.16 • Rendimento de uma Máquina Térmica

O **rendimento** de uma máquina térmica é a fração do calor retirado da fonte quente que ela consegue entregar como trabalho. É sempre menor que 1, porque o calor rejeitado nunca é zero.

$$\eta = \frac{W}{Q_Q} = \frac{Q_Q - Q_F}{Q_Q} = 1 - \frac{Q_F}{Q_Q} \tag{7.12}$$

η: rendimento, entre 0 e 1 (–)
W: trabalho útil por ciclo (J)
Q_Q: calor retirado da fonte quente (J)
Q_F: calor rejeitado para a fonte fria (J)

CUIDADO

O rendimento é razão entre *calores*: joule, quilocaloria ou watt, desde que a mesma unidade nos dois. Não confunda com a razão de temperaturas, que só aparece em Carnot e exige kelvin.

EXEMPLO 7.10 • Rendimento de um motor de acionamento

O motor de acionamento de um compressor recebe 900 kJ por ciclo da queima do combustível e rejeita 630 kJ pelos gases de escape e pelo sistema de arrefecimento. Determine o trabalho útil por ciclo e o rendimento.

1 Compreender

O assunto é a **definição de rendimento** de uma máquina térmica.

Objetivo. Obter o trabalho útil por ciclo e a fração do calor do combustível que vira trabalho. O que está em jogo é ver que, num ciclo, o trabalho sai da Primeira Lei: o que entra menos o que é rejeitado, porque a energia interna volta ao valor inicial.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.12) e diga o que cada símbolo significa. O rendimento é a razão entre o trabalho e o calor de entrada.

2 Organizar

Dados $Q_Q = 900\,\text{kJ}$
$Q_F = 630\,\text{kJ}$.

Conversões nenhuma: os dois calores em kJ, e o rendimento é adimensional.

Estratégia calcule $W = Q_Q - Q_F$ e aplique a Equação (7.12).

3 **Resolver**

Trabalho útil. Pela Primeira Lei no ciclo:

$$\begin{aligned} W &= Q_Q - Q_F \\ &= 900 - 630 \end{aligned}$$

$$\boxed{W = 270\,\text{kJ}}$$

Rendimento. Divida pelo calor de entrada:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{W}{Q_Q} \\ &= \frac{270}{900} = 0{,}30 \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta = 30\,\%}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o trabalho é menor que o calor de entrada, como a Segunda Lei exige, e o rendimento ficou abaixo de 1. Confira pelo outro caminho: $1 - 630/900 = 1 - 0{,}70 = 0{,}30$, o mesmo valor. Trinta por cento é a ordem de grandeza real de um motor de combustão interna, e os 70 % restantes vão para o escape e para o radiador. Recuperar parte desse calor rejeitado, em sistemas de cogeração, é o que eleva a eficiência global de uma instalação sem violar nada.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2012

Uma máquina térmica opera com rendimento de 35 %. A quantidade de calor que a máquina recebe da fonte de calor quente é 1.000 J.

Qual é a quantidade de calor, em J, que a máquina cede à fonte de calor fria?

(A) 650

(B) 538

(C) 350

(D) 286

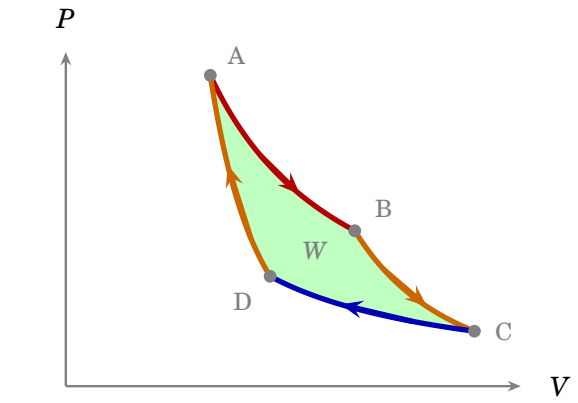
(E) 186

GCQVN5

7.5.2 Ciclo de Carnot

O **ciclo de Carnot** é o ciclo de maior rendimento possível entre duas temperaturas dadas. Ele é formado por quatro processos reversíveis, dois isotérmicos e dois adiabáticos:

1. **Expansão isotérmica** a T_Q, em que o gás absorve Q_Q;
2. **Expansão adiabática**, em que o gás esfria de T_Q até T_F;
3. **Compressão isotérmica** a T_F, em que o gás rejeita Q_F;
4. **Compressão adiabática**, em que o gás volta de T_F a T_Q e fecha o ciclo.



$A \to B$: isotérmica a T_Q $C \to D$: isotérmica a T_F
$B \to C$, $D \to A$: adiabáticas W: área do ciclo
adiabáticas mais inclinadas que o real, para leitura

Figura 7.7

DEFINIÇÃO 7.17 • Rendimento de Carnot

No ciclo de Carnot, a razão entre os calores trocados é igual à razão entre as temperaturas absolutas das duas fontes. Isso transforma o rendimento numa expressão que depende *apenas* das temperaturas, e que vale como teto para qualquer máquina real operando entre elas.

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_Q} \tag{7.13}$$

η_{Carnot}: rendimento máximo entre as duas fontes (–)
T_F: temperatura absoluta da fonte fria (K)
T_Q: temperatura absoluta da fonte quente (K)

CUIDADO

As duas temperaturas em kelvin. Entre 27 °C e 227 °C, a conta certa dá 40 % e a conta feita em Celsius daria 88 %.

NOTA

Teorema de Carnot. Nenhuma máquina real que opere entre as mesmas duas temperaturas pode ter rendimento maior que o de Carnot, e nenhuma pode igualá-lo, porque todo processo real tem irreversibilidades: atrito, turbulência e troca de calor através de diferença finita de temperatura. Duas consequências diretas para prova: um rendimento anunciado acima do de Carnot é sinal de enunciado impossível ou de conta errada, e a única forma de elevar o teto é aumentar T_Q ou baixar T_F.

EXEMPLO 7.11 • Rendimento real diante do limite de Carnot

Uma máquina térmica opera entre uma fonte quente a 527 °C e uma fonte fria a 127 °C. Ela absorve 500 kJ por ciclo e produz 180 kJ de trabalho. Determine o rendimento máximo teórico e o rendimento real, e compare os dois.

1 Compreender

O assunto é a **comparação entre o rendimento real e o limite de Carnot**.

Objetivo. Obter o rendimento máximo teórico e o rendimento real, e comparar os dois. O que está em jogo é separar as duas contas, que são independentes: o limite depende só das temperaturas, em kelvin, e o real depende só das energias.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.13) e diga o que cada símbolo significa. O rendimento real vem da Equação (7.12).

2 Organizar

Dados $\theta_Q = 527\,^\circ\text{C}$
$\theta_F = 127\,^\circ\text{C}$
$Q_Q = 500\,\text{kJ}$
$W = 180\,\text{kJ}$.

Conversões $T_Q = 527 + 273 = 800\,\text{K}$
$T_F = 127 + 273 = 400\,\text{K}$.

Estratégia aplique a Equação (7.13) com as temperaturas em kelvin; depois a Equação (7.12) com os valores de energia.

3 **Resolver**

Limite de Carnot. Entre as duas fontes:

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_F}{T_Q} = 1 - \frac{400}{800} = 1 - 0{,}50$$

$$\boxed{\eta_{\text{Carnot}} = 0{,}50 = 50\,\%}$$

Rendimento real. Pela definição:

$$\eta_{\text{real}} = \frac{W}{Q_Q} = \frac{180}{500} = 0{,}36$$

$$\boxed{\eta_{\text{real}} = 0{,}36 = 36\,\%}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência: o rendimento real ficou abaixo do de Carnot, como o Teorema de Carnot exige. Se tivesse dado acima, haveria erro de conta ou enunciado impossível, e essa comparação é a primeira conferência a fazer em toda questão de máquina térmica. A máquina aproveita 36/50, ou seja, 72 % do que a física permitiria, o que é um bom desempenho para turbina a vapor. Em usina termelétrica, aumentar T_Q com vapor superaquecido e baixar T_F com condensador eficiente são as duas únicas alavancas reais, porque as duas mexem no teto e não apenas no aproveitamento.

EXEMPLO 7.12 • Ciclo no diagrama $P \times V$

Um gás ideal executa o ciclo A→B→C→A, formado por uma expansão isobárica de A para B, uma compressão isotérmica de B para C e uma transformação isocórica de C para A. São dados $P_0 = 2{,}0 \times 10^5$ Pa, $V_A = V_0 = 0{,}010\,\text{m}^3$ e $V_B = 4\,V_0$. Determine o trabalho líquido do ciclo e diga se ele funciona como máquina térmica ou como refrigerador. ($\ln 4 \approx 1{,}386$)

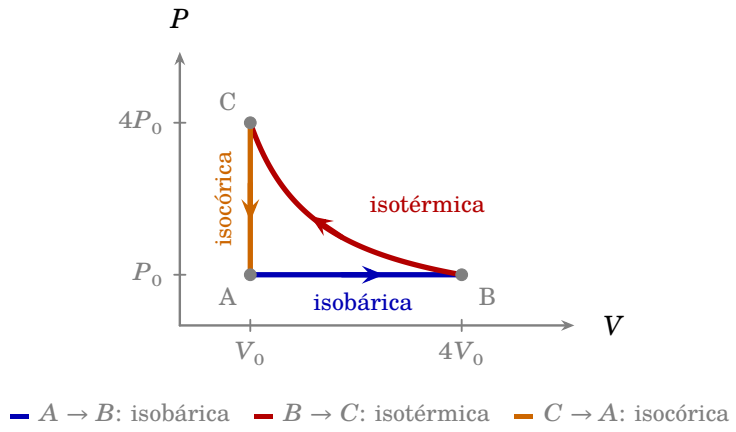


Figura 7.8

1 Compreender

O assunto é o **trabalho num ciclo fechado**: o gás volta ao estado inicial, então $\Delta U = 0$ e o trabalho líquido é igual ao calor líquido.

Objetivo. Obter o trabalho líquido do ciclo e decidir se o gás entrega ou consome trabalho. O que está em jogo é somar os trechos com sinal, cada um com a fórmula da sua transformação, e ler o sinal do total, que responde a segunda parte; o trecho isocórico vale zero.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.9) e diga o que cada símbolo significa. Ela resolve o trecho isobárico; o isotérmico usa $W = nRT\ln(V_2/V_1)$.

2 Organizar

Dados $P_0 = 2{,}0 \times 10^5$ Pa
$V_0 = 0{,}010\,\text{m}^3$
A→B isobárica de V_0 a $4V_0$
B→C isotérmica de $4V_0$ a V_0
C→A isocórica.

Conversões nenhuma: pressão em pascal e volume em m^3 dão joule.

Estratégia calcule o trabalho de cada trecho com a fórmula que lhe cabe, some os três com sinal, e leia o sentido do ciclo no diagrama para confirmar.

3 **Resolver**

Trecho A→B, isobárico. O gás se expande a pressão constante:

$$W_{AB} = P_0\,(V_B - V_A) = P_0 \times 3V_0$$
$$= 2{,}0 \times 10^5 \times 3 \times 0{,}010 = 6\,000\,\text{J}$$

Trecho B→C, isotérmico. Como $nRT = P_B V_B = P_0 \times 4V_0$:

$$W_{BC} = P_B\,V_B\,\ln\!\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 4P_0V_0\,\ln\!\left(\frac{V_0}{4V_0}\right)$$
$$= 4 \times 2\,000 \times (-1{,}386) = -11\,090\,\text{J}$$

Trecho C→A, isocórico. O volume não muda:

$$W_{CA} = 0$$

Trabalho líquido. Some os três trechos:

$$W_{\text{total}} = 6\,000 - 11\,090 + 0$$

$$W_{\text{total}} \approx -5{,}1 \times 10^3\,\text{J}$$

Como o trabalho líquido é negativo, o ciclo *consome* trabalho e transfere calor da fonte fria para a quente: é um refrigerador.

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelo sentido do percurso no diagrama: A→B vai para a direita, B→C volta para a esquerda por cima da isobárica, e C→A desce na vertical. O percurso é anti-horário, o que confirma o sinal negativo sem refazer conta nenhuma. Perceba que a compressão isotérmica custou mais trabalho do que a expansão isobárica rendeu, e é por isso que o saldo é negativo. Reconhecer o sentido do ciclo antes de calcular já responde à segunda parte da questão e elimina as alternativas de sinal trocado.

EXEMPLO 7.13 • Central termelétrica

Uma central termelétrica opera com rendimento de 40 % e potência elétrica de 200 MW. A fonte fria está a 27 °C. Determine a taxa de calor absorvido da fonte quente, a taxa de calor rejeitado e a temperatura mínima que a fonte quente precisa ter para que esse rendimento seja possível.

1 **Compreender**

O assunto é o **rendimento** e o **limite de Carnot** em regime contínuo, em que as energias por ciclo viram potências.

Objetivo. Obter as taxas de calor absorvido e rejeitado e a temperatura mínima da fonte quente que torna esse rendimento possível. O que está em jogo é inverter o Teorema de Carnot na terceira parte: se nenhuma máquina supera $1 - T_F/T_Q$, então esses 40 % só são possíveis acima de certa temperatura de fonte quente.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.12) e diga o que cada símbolo significa. A Primeira Lei dá o calor rejeitado, e a Equação (7.13) dá o teto.

2 **Organizar**

Dados $\eta = 0{,}40$
$\dot{W} = 200\,\text{MW}$
$\theta_F = 27\,^\circ\text{C}$.

Conversões $T_F = 27 + 273 = 300\,\text{K}$.

Estratégia use a Equação (7.12) para achar $\dot{Q}_Q$, a Primeira Lei para $\dot{Q}_F$, e imponha $\eta \le \eta_{\text{Carnot}}$ na Equação (7.13) para achar a temperatura mínima.

3 **Resolver**

Calor absorvido. Pela definição de rendimento:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_Q &= \frac{\dot{W}}{\eta} \\ &= \frac{200}{0{,}40}\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{Q}_Q = 500\,\text{MW}}$$

Calor rejeitado. Pela Primeira Lei:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_F &= \dot{Q}_Q - \dot{W} \\ &= 500 - 200\end{aligned}$$

$$\boxed{\dot{Q}_F = 300\,\text{MW}}$$

Temperatura mínima da fonte quente. Imponha que o rendi-

mento não passe do limite de Carnot e isole T_Q:

$$0{,}40 \le 1 - \frac{300}{T_Q}$$

$$\frac{300}{T_Q} \le 0{,}60$$

$$T_Q \ge \frac{300}{0{,}60}$$

$$\boxed{T_Q \ge 500\,\text{K} = 227\,^\circ\text{C}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: a máquina rejeita 300 MW, mais do que os 200 MW que entrega, o que é o esperado para um rendimento abaixo de 50 %. E a temperatura mínima encontrada é bem acima da fonte fria, como tem de ser. Esses 300 MW rejeitados são um problema físico concreto: precisam ir para um rio, para o mar ou para uma torre de resfriamento, e o tamanho dessa torre sai desta conta. Aproveitar parte deles em cogeração, aquecendo processo industrial, eleva a eficiência global da instalação sem mexer no rendimento termodinâmico do ciclo.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Uma máquina térmica remove 300 J de um reservatório quente a 390 K, realiza 50 J de trabalho e descarrega 250 J para um reservatório frio a 273 K.

A quantidade de trabalho perdida em cada ciclo, em joules, devido aos processos irreversíveis presentes na operação dessa máquina, é

(A) 15
(B) 20
(C) 30
(D) 40
(E) 50

KRCHZN

7.6 Refrigeradores e Bombas de Calor

DEFINIÇÃO 7.18 • Refrigerador e Bomba de Calor

Refrigeradores e **bombas de calor** são máquinas térmicas funcionando ao contrário: consomem trabalho W para retirar um calor Q_F da fonte fria e entregar $Q_Q = Q_F + W$ à fonte quente. A diferença entre os dois não está na máquina, e sim no que se quer dela: no refrigerador interessa o calor retirado do ambiente frio; na bomba de calor, o calor entregue ao ambiente quente.

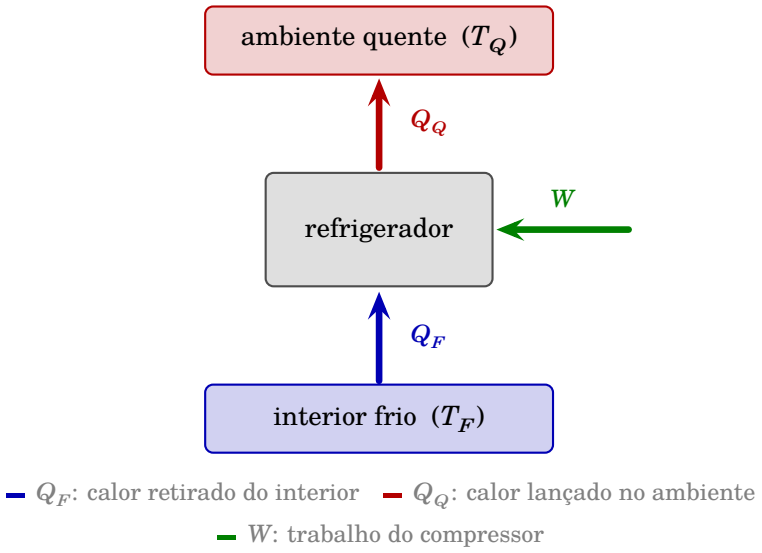


Figura 7.9

DEFINIÇÃO 7.19 • Coeficiente de Performance

O **coeficiente de performance**, ou COP, é a razão entre o que se quer da máquina e o trabalho pago por isso. Como o numerador pode ser maior que o denominador, o COP costuma ser maior que 1, e nem por isso viola alguma lei: ele não é um rendimento, e sim uma razão entre calor transportado e trabalho consumido.

$$\mathrm{COP}_{\mathrm{ref}} = \frac{Q_F}{W} = \frac{T_F}{T_Q - T_F} \tag{7.14}$$

$$\mathrm{COP}_{\mathrm{BC}} = \frac{Q_Q}{W} = \frac{T_Q}{T_Q - T_F} \tag{7.15}$$

$\mathrm{COP}_{\mathrm{ref}}$: coeficiente de performance do refrigerador (–)
$\mathrm{COP}_{\mathrm{BC}}$: coeficiente de performance da bomba de calor (–)
Q_F: calor retirado da fonte fria (J)
Q_Q: calor entregue à fonte quente (J)
W: trabalho consumido (J)
T_F, T_Q: temperaturas absolutas das fontes fria e quente (K)

Das duas expressões sai uma relação útil de conferência, $\mathrm{COP}_{\mathrm{BC}} = \mathrm{COP}_{\mathrm{ref}} + 1$, que vem direto de $Q_Q = Q_F + W$. A bomba de calor é sempre mais vantajosa que o refrigerador entre as mesmas fontes, e é essa a razão de aquecer ambientes com bomba de calor em vez de resistência elétrica: a resistência entrega no máximo um joule de calor por joule consumido, e a bomba entrega vários.

CUIDADO

As formas com temperatura valem para a máquina reversível e dão o COP *máximo*. Toda máquina real fica abaixo, como o rendimento real fica abaixo do de Carnot. E as temperaturas em kelvin.

EXEMPLO 7.14 • Refrigerador criogênico

Um sistema de refrigeração retira 120 kJ de um corpo a $-100\,^\circ\mathrm{C}$ e rejeita calor para o ambiente a $25\,^\circ\mathrm{C}$. Determine o coeficiente de performance máximo e o trabalho mínimo necessário por ciclo.

1 Compreender

O assunto é o **COP de refrigerador** no caso ideal.

Objetivo. Obter o coeficiente de performance máximo e o trabalho mínimo por ciclo. O que está em jogo é ler "máximo" e "mínimo" como a máquina reversível: vale a expressão em função das temperaturas, em kelvin, e qualquer máquina real gastaria mais.

Antes de seguir, escreva a Equação (7.14) e diga o que cada símbolo significa. A forma com temperaturas dá o COP máximo; a forma com energias dá o trabalho.

2 Organizar

Dados $Q_F = 120\,\mathrm{kJ}$
$\theta_F = -100\,^\circ\mathrm{C}$
$\theta_Q = 25\,^\circ\mathrm{C}$.

Conversões $T_F = -100 + 273 = 173\,\mathrm{K}$
$T_Q = 25 + 273 = 298\,\mathrm{K}$.

Estratégia aplique a Equação (7.14) na forma com temperaturas e depois isole o trabalho na forma com energias.

3 Resolver

COP máximo. Pela forma com temperaturas:

$$\mathrm{COP}_{\mathrm{máx}} = \frac{T_F}{T_Q - T_F} = \frac{173}{298 - 173} = \frac{173}{125}$$

$$\boxed{\mathrm{COP}_{\mathrm{máx}} \approx 1{,}4}$$

Trabalho mínimo. Isole o trabalho na definição do COP:

$$\begin{aligned} \mathrm{COP} &= \frac{Q_F}{W} \\ W_{\text{mín}} &= \frac{Q_F}{\mathrm{COP}_{\text{máx}}} \\ &= \frac{120}{1{,}38} \end{aligned}$$

$$W_{\text{mín}} \approx 87\,\text{kJ}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência: o trabalho mínimo ficou da mesma ordem do calor removido, o que já mostra como esse resfriamento é caro. Um refrigerador doméstico trabalha entre cerca de 278 e 308 K e tem COP ideal próximo de 9: cada joule de trabalho move nove de calor; aqui, pouco mais de um. O desnível de 125 K faz a diferença, e é por isso que a liquefação do gás natural, a $-162\,^{\circ}\text{C}$, é das etapas de maior consumo energético da cadeia do gás.

Cuidado com a pegadinha: COP maior que 1 não é rendimento acima de 100 %. O COP compara calor *transportado* com trabalho consumido, e transportar calor é mais barato que criá-lo.

PARTE III

Eletricidade e Magnetismo

CAPÍTULO

8

Eletrostática

Faraday, com os olhos da mente, via linhas de força atravessando todo o espaço onde os matemáticos viam centros de força atraindo a distância; Faraday via um meio onde eles não viam nada além de distância.

JAMES CLERK MAXWELL

Coulomb mediu a força entre duas cargas a distância. Faraday viu linhas de força preenchendo o espaço entre elas. A diferença entre as duas maneiras de ver é o que Maxwell registra no prefácio do *Tratado de Eletricidade e Magnetismo* (*A Treatise on Electricity and Magnetism*), os dois volumes de 1873 em que deu forma matemática às ideias de Faraday, e é o assunto deste capítulo. Faraday preferiu dizer que cada carga enche o espaço em volta com um campo, e que a outra carga sente o campo onde está. As linhas de campo que você vai desenhar são o que Faraday via, e o potencial elétrico é o mesmo espaço descrito por energia em vez de força.

A **Eletrostática** estuda as cargas elétricas em repouso e aquilo que elas produzem em volta de si. O capítulo se organiza em duas descrições do mesmo espaço. A primeira é vetorial e responde à pergunta "que força age aqui": começa na Lei de Coulomb, que tem a forma da Lei da Gravitação Universal de Newton, e passa ao campo elétrico, que é a força por unidade de carga. A segunda é escalar e responde à pergunta "quanta energia há aqui": é o potencial elétrico, que retoma a energia potencial do cap. 4 escrita por unidade de carga. As duas descrições falam da mesma realidade, e é por isso que a banca

cobra tanto a passagem de uma para a outra. O capítulo fecha com os condutores em equilíbrio e com os capacitores, que são o dispositivo construído para guardar energia nesse campo.

Na indústria de petróleo e gás o assunto é, antes de tudo, segurança. O bombeamento de derivados por dutos e o enchimento de tanques separam carga por atrito entre o líquido e a parede, e uma faísca de poucos milijoules basta para inflamar vapor de hidrocarboneto. Daí o aterramento obrigatório do caminhão-tanque antes do carregamento, os limites de vazão em produtos de baixa condutividade e a geometria arredondada dos equipamentos de processo, que evita o acúmulo de carga em cantos vivos. Do lado do proveito, precipitadores eletrostáticos limpam os gases das unidades de craqueamento, e a proteção catódica usa diferença de potencial para impedir que dutos e tanques enterrados se oxidem.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Aplicar a quantização da carga, $q = ne$, e a conservação da carga nos processos de eletrização por atrito, contato e indução;
- Calcular a força entre cargas puntiformes pela Lei de Coulomb e compor forças pelo princípio da superposição;
- Calcular o campo elétrico de uma carga puntiforme e o campo uniforme entre placas paralelas, e localizar o ponto em que o campo se anula;
- Calcular o potencial elétrico, a energia potencial elétrica e o trabalho do campo ao deslocar uma carga, controlando os sinais;
- Reconhecer as cinco propriedades do condutor em equilíbrio eletrostático e explicar o efeito das pontas e a gaiola de Faraday;
- Calcular a capacitância, a carga e a energia de um capacitor, e resolver associações em série, em paralelo e mistas.

8.1 Carga Elétrica

A matéria é feita de átomos com **prótons** de carga positiva, **elétrons** de carga negativa e **nêutrons** sem carga. Num átomo neutro o número de prótons é igual ao de elétrons, e a carga total é zero. Prótons ficam presos ao núcleo e não se transferem em nenhum fenômeno deste capítulo. Quem se move é o elétron, e é essa assimetria que decide tudo o que vem a seguir: um corpo **eletrizado positivamente** está com falta de elétrons, e um corpo **eletrizado negativamente** está com excesso deles.

DEFINIÇÃO 8.1 • Quantização da Carga Elétrica

A **carga elétrica** de qualquer corpo é sempre um múltiplo inteiro da **carga elementar** e, que é o módulo da carga do elétron e a do próton. Não existe corpo com meia carga elementar, do mesmo modo que não existe meia moeda no caixa. A carga do corpo é, então, o número de elétrons em falta ou em excesso multiplicado por e.

$$|q| = n\,e \tag{8.1}$$

$|q|$: módulo da carga do corpo (C)
n: número de elétrons em falta ou em excesso
e: carga elementar, $1{,}6 \times 10^{-19}$ (C)

Duas outras propriedades completam o quadro e são cobradas o tempo todo. A **conservação da carga** diz que, num sistema isolado, a soma algébrica das cargas não muda: a eletrização nunca cria carga, apenas transfere elétrons de um corpo para o outro. E a carga é **aditiva**, isto é, a carga de um conjunto é a soma algébrica das cargas das partes, com os sinais.

8.1.1 Processos de eletrização

Eletrizar um corpo é desequilibrar o número de elétrons e de prótons dele. Existem três maneiras de fazer isso, e a banca pede que você saiba o sinal com que cada corpo termina.

Na **eletrização por atrito**, dois materiais diferentes são esfregados e um deles arranca elétrons do outro. Os dois terminam com cargas de mesmo módulo e sinais opostos, porque os elétrons que um perdeu foram exatamente os que o outro ganhou. É o que acontece com o derivado de petróleo escoando por um duto.

Na **eletrização por contato**, um corpo eletrizado toca um corpo condutor e os dois repartem a carga total. Depois de separados, ambos ficam com carga de **mesmo sinal**, o do corpo que estava eletrizado.

Na **eletrização por indução**, o corpo eletrizado apenas se aproxima, sem tocar. Ele empurra ou puxa os elétrons livres do condutor vizinho e separa as cargas dele em duas regiões. Se o condutor for então aterrado e o fio terra for retirado *antes* de o indutor se afastar, o condutor fica com carga de **sinal oposto** ao do indutor.

Quando dois condutores se tocam, o que a natureza iguala é o potencial, não a carga. No caso particular de condutores **idênticos**, potenciais iguais significam cargas iguais, e o resultado fica simples.

DICA

Um coulomb é uma quantidade enorme de carga, $6{,}25 \times 10^{18}$ cargas elementares. Por isso os enunciados trabalham em microcoulombs (μC $= 10^{-6}$ C) e em nanocoulombs (nC $= 10^{-9}$ C). Converta para coulombs antes de substituir em qualquer fórmula.

CUIDADO

Contato e indução terminam com sinais opostos entre si. Por contato, o corpo neutro fica com o *mesmo* sinal do indutor. Por indução, fica com o sinal *contrário*. Uma questão que diga "uma barra neutra foi eletrizada por indução e ficou positiva" está afirmando que ela *perdeu elétrons*, porque prótons não se transferem.

DEFINIÇÃO 8.2 • Contato entre Condutores Idênticos

Dois condutores idênticos postos em contato repartem igualmente a carga total do par. A carga final de cada um é a média aritmética das cargas iniciais, com os sinais. O caso mais cobrado é o de um corpo eletrizado tocando um corpo neutro, em que cada um termina com metade da carga inicial.

$$Q_1' = Q_2' = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \tag{8.2}$$

Q_1, Q_2: cargas antes do contato, com sinal (C)
Q_1', Q_2': carga de cada um depois do contato (C)

NOTA

Para n condutores idênticos postos em contato *ao mesmo tempo*, cada um fica com a n-ésima parte da carga total. Se os contatos forem *sucessivos*, dois a dois, a Equação (8.2) tem de ser aplicada uma vez por contato, na ordem do enunciado, e o resultado é outro. O caso de condutores de tamanhos diferentes fica para a Seção 8.5.

EXEMPLO 8.1 • Quantização da carga

Uma pequena esfera metálica está eletrizada com carga $q = -3{,}2\,\mu\text{C}$. Determine quantos elétrons em excesso ela possui. Adote $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

1 Compreender

O assunto é a **quantização da carga**.

Objetivo. Obter quantos elétrons a mais a esfera carrega em relação ao estado neutro. O que está em jogo é ler o sinal: negativo diz que o desequilíbrio é de excesso de elétrons, porque prótons não se transferem; o sinal serve para interpretar o resultado e não entra na conta.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.1) e diga o que cada símbolo significa. Ela trabalha com o módulo da carga, em coulombs.

2 Organizar

Dados $q = -3{,}2\,\mu\text{C}$
$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

Conversões $|q| = 3{,}2\,\mu\text{C} = 3{,}2 \times 10^{-6}$ C.

Estratégia isole n na Equação (8.1) e divida.

3 Resolver

Número de elétrons. Isole n na quantização da carga:

$$|q| = n\,e$$
$$n = \frac{|q|}{e}$$

Divisão em potências de dez. Substitua os valores em coulombs e subtraia os expoentes:

$$n = \frac{3{,}2 \times 10^{-6}}{1{,}6 \times 10^{-19}} = 2{,}0 \times 10^{-6-(-19)}$$

$$\boxed{n = 2{,}0 \times 10^{13} \text{ elétrons}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela ordem de grandeza. Vinte trilhões de elétrons parecem muitos, mas correspondem a apenas 3,2 milionésimos de coulomb, o que confirma que a carga elementar é minúscula e que a carga de um corpo comum é sempre um número gigantesco de elétrons. Perceba também o sentido do cálculo: como o expoente do numerador é 13 unidades maior que o do denominador, o resultado tinha de sair na casa de 10^{13}. É essa mesma ordem de grandeza que está por trás de um risco de rotina na indústria: a carga separada pelo atrito do produto com a parede do duto é pequena em coulombs e ainda assim envolve elétrons suficientes para produzir uma faísca de ignição.

> **EXEMPLO 8.2** • Contato entre duas esferas idênticas
>
> A esfera condutora A está eletrizada com $+12\,\text{nC}$ e é posta em contato com a esfera B, idêntica a ela e inicialmente neutra. Depois de separadas, determine a carga de cada esfera.

1 Compreender

O assunto é a **conservação da carga** junto com o contato entre condutores idênticos.

Objetivo. Obter a carga com que cada uma das duas esferas termina. O que está em jogo é ver as duas coisas que acontecem ao mesmo tempo: a carga total do par não muda, porque o sistema está isolado, e ela se reparte igualmente, porque as esferas são idênticas.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.2) e diga o que cada símbolo significa. A esfera neutra não fica neutra ao final, e a eletrizada não devolve tudo.

2 Organizar

Dados $Q_A = +12\,\text{nC}$
$Q_B = 0$
esferas idênticas.

Conversões nenhuma: o nanocoulomb fica, porque só aparece numa média.

Estratégia some as cargas iniciais com os sinais e divida por dois, pela Equação (8.2).

3 Resolver

Média das cargas. Aplique-a com os sinais:

$$Q'_A = Q'_B = \frac{Q_A + Q_B}{2} = \frac{12 + 0}{2}$$

$$\boxed{Q'_A = Q'_B = +6\,\text{nC}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência somando o resultado: $6 + 6 = 12\,\text{nC}$, que é a carga inicial do par, como a conservação exige. Guarde o caso geral, porque a banca o usa com números diferentes: um corpo eletrizado que toca um corpo neutro idêntico entrega metade da sua carga, e cada contato seguinte com um novo corpo neutro divide de novo por dois. É por isso que a esfera de um gerador eletrostático perde tensão a cada objeto que encosta nela.

EXEMPLO 8.3 • Contatos sucessivos entre três esferas

Três esferas condutoras idênticas têm cargas $Q_A = +8\,\mu\text{C}$, $Q_B = 0$ e $Q_C = -4\,\mu\text{C}$. Primeiro A é posta em contato com B e as duas são separadas. Em seguida B é posta em contato com C e as duas são separadas. Determine a carga final de cada esfera.

1 Compreender

O assunto é o **contato entre condutores idênticos aplicado duas vezes, na ordem do enunciado**, formato preferido da banca.

Objetivo. Obter a carga com que cada uma das três esferas termina, seguida a sequência exata de contatos. O que está em jogo é não dividir a carga total das três por três de uma só vez: as esferas nunca se tocam ao mesmo tempo, e a esfera A sai da história depois do primeiro contato.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.2) e diga o que cada símbolo significa. Uma vez por contato, com a carga atualizada.

2 Organizar

Dados $Q_A = +8\,\mu\text{C}$
$Q_B = 0$
$Q_C = -4\,\mu\text{C}$
esferas idênticas
contato A com B e depois B com C.

Conversões nenhuma: o microcoulomb fica, porque só aparece em médias.

Estratégia resolva um contato de cada vez. Depois do primeiro, atualize a carga de B e use esse valor novo no segundo contato.

3 Resolver

Primeiro contato, A com B. Média das duas:

$$\begin{aligned} Q'_A = Q'_B &= \frac{Q_A + Q_B}{2} \\ &= \frac{8+0}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{Q'_A = +4\,\mu\text{C}}$$

Segundo contato, B com C. A esfera A não participa de mais nada e sai da conta com essa carga. B, que passou a ter $+4\,\mu\text{C}$, toca C:

$$\begin{aligned} Q''_B = Q'_C &= \frac{Q'_B + Q_C}{2} \\ &= \frac{4 + (-4)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q''_B = Q'_C = 0}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela conservação: a carga total era $8+0-4 = +4\,\mu\text{C}$ e continua sendo $4+0+0 = +4\,\mu\text{C}$ ao final, toda ela concentrada em A. Perceba que B e C terminam neutras sem que nenhuma carga tenha desaparecido, apenas porque as duas parcelas que se encontraram no segundo contato eram simétricas.

Cuidado com a pegadinha: dividir a carga total das três por três daria $+1{,}33\,\mu\text{C}$ em cada uma, e esse valor costuma estar entre as alternativas. Ele só valeria se as três esferas fossem encostadas simultaneamente. Leia a ordem dos contatos antes de calcular qualquer

coisa.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011
Considere duas pequenas esferas condutoras idênticas, A e B, carregadas eletricamente. A esfera A está carregada com carga positiva Q, e a esfera B, com carga negativa $-Q/2$. As duas são colocadas em contato. Após estabelecer-se o equilíbrio eletrostático, elas são separadas.
Qual a carga final da esfera A?

(A) Q
(B) $Q/4$
(C) zero
(D) $-Q/2$
(E) $-4Q$

Y24M4Y

8.2 Lei de Coulomb

Saber que dois corpos estão eletrizados ainda não diz com que intensidade eles se puxam ou se empurram. Quem responde a isso é a Lei de Coulomb, obtida por Charles Coulomb em 1785 com uma balança de torção, e ela vale para cargas **puntiformes**, isto é, para corpos cujas dimensões são desprezíveis diante da distância que os separa.

DEFINIÇÃO 8.3 • Lei de Coulomb

A força elétrica entre duas cargas puntiformes tem módulo proporcional ao produto dos módulos das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A direção é a da reta que une as duas cargas. O sentido é de **repulsão** quando as cargas têm o mesmo sinal e de **atração** quando têm sinais opostos. As duas forças formam um par ação-reação: têm sempre o mesmo módulo, mesmo quando as cargas são muito diferentes.

$$F = k\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2} \tag{8.3}$$

F: módulo da força elétrica sobre cada carga (N)
k: constante eletrostática do vácuo, 9×10^9 ($\mathrm{N \cdot m^2/C^2}$)
$|q_1|, |q_2|$: módulos das cargas (C)
r: distância entre as cargas (m)

CUIDADO

Substitua na Equação (8.3) apenas os *módulos* das cargas. O sinal não entra na conta: ele serve para você decidir, depois, se a força é de atração ou de repulsão, e para desenhar as setas na direção certa. Quem substitui $-3\ \mu$C com o sinal encontra uma força negativa, que não significa nada aqui, porque F é um módulo.

A Lei de Coulomb tem exatamente a forma da Lei da Gravitação Universal, $F = G m_1 m_2 / r^2$: produto de duas propriedades dos corpos dividido pelo quadrado da distância. A diferença está na intensidade e no sinal. Entre um elétron e um próton, a força elétrica é cerca de 10^{39} vezes maior que a gravitacional. Se a força elétrica é tão mais intensa, por que é a gravidade que governa o sistema solar? Porque a carga vem nos dois sinais e os corpos astronômicos são praticamente neutros, de modo que as atrações e as repulsões se anulam. A massa só vem num sinal e nunca se anula.

8.2.1 Princípio da superposição

Quando mais de uma carga age sobre uma carga de prova, a força resultante é a **soma vetorial** das forças que cada uma faria sozinha, como se as outras não existissem:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

Na prática, calcule o módulo de cada parcela pela Equação (8.3), decida o sentido de cada uma pelos sinais das cargas e só então some. Em problemas com todas as cargas sobre uma reta, a soma vetorial vira uma soma algébrica: adote um sentido como positivo e some com sinal. Em problemas em duas dimensões, decomponha cada força nos eixos, como você fez com as forças do cap. 3.

EXEMPLO 8.4 • Força entre duas cargas puntiformes

Dois corpos eletrizados com $q_1 = +2\,\mu\text{C}$ e $q_2 = -3\,\mu\text{C}$ estão separados por $r = 0{,}5\,\text{m}$ no vácuo. Determine o módulo da força elétrica entre eles e classifique-a como atrativa ou repulsiva.

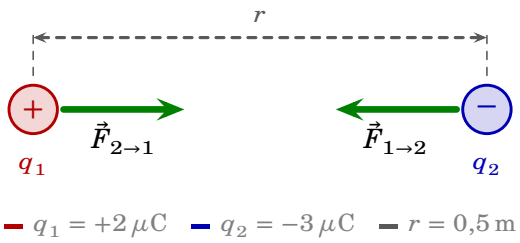


Figura 8.1

1 COMPREENDER

O assunto é a **Lei de Coulomb** na forma direta: os corpos são tratados como cargas puntiformes, porque o enunciado não dá dimensões para eles.

Objetivo. Obter a intensidade da força entre as cargas e classificá-

la como atrativa ou repulsiva. O que está em jogo é separar os dois papéis do sinal: ele não entra no cálculo do módulo, só na classificação, e sinais opostos dão atração.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.3) e diga o que cada símbolo significa. Entram nela os módulos das cargas, em coulombs.

2 Organizar

Dados $q_1 = +2\,\mu\text{C}$
$q_2 = -3\,\mu\text{C}$
$r = 0{,}5\,\text{m}$
$k = 9 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

Conversões $|q_1| = 2 \times 10^{-6}\,\text{C}$
$|q_2| = 3 \times 10^{-6}\,\text{C}$.

Estratégia substitua os módulos na Equação (8.3) e classifique a força pelos sinais.

3 Resolver

Lei de Coulomb. Escreva-a e substitua os módulos em coulombs:

$$\begin{aligned} F &= k\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{2 \times 10^{-6} \times 3 \times 10^{-6}}{(0{,}5)^2} \end{aligned}$$

Módulo da força. Multiplique as cargas e eleve a distância ao quadrado:

$$\begin{aligned} F &= 9 \times 10^9 \times \frac{6 \times 10^{-12}}{0{,}25} \\ &= 9 \times 10^9 \times 24 \times 10^{-12} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 0{,}216\,\text{N}}$$

Sentido. Como os sinais são opostos, a força é de atração.

A força é atrativa: cada carga é puxada na direção da outra.

4 Avaliar

Avalie a coerência pela ordem de grandeza. Cargas de poucos microcoulombs, que são quantidades minúsculas, produzem a meio metro de distância uma força de 0,216 N, equivalente ao peso de uma massa de 22 g. Isso mede o quanto a constante k é grande e explica por que a eletrostática é um problema de segurança e não uma curiosidade. Confira também a dependência com a distância: se você dobrar r

para 1 m, a força cai a um quarto, 0,054 N, e não à metade. É a lei do inverso do quadrado, a mesma da gravitação.

EXEMPLO 8.5 • Superposição de forças em cargas alinhadas

Três cargas estão sobre um mesmo eixo: $q_A = +4\,\text{nC}$ em $x = 0$, $q_B = -2\,\text{nC}$ em $x = 0{,}3\,\text{m}$ e $q_C = +6\,\text{nC}$ em $x = 0{,}7\,\text{m}$. Determine a força resultante sobre q_B.

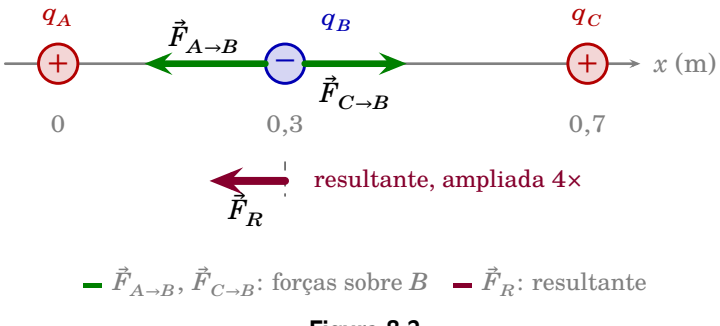


Figura 8.2

1 Compreender

O assunto é o **princípio da superposição**: a força de cada carga fixa sobre q_B se calcula separadamente, como se a outra não existisse, e as duas se somam com sinal.

Objetivo. Obter a força resultante sobre q_B, com módulo e sentido. O que está em jogo é dar o sentido certo a cada parcela antes de somar: como q_B é negativa e as outras duas são positivas, as duas atrações puxam q_B para lados opostos.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.3) e diga o que cada símbolo significa. Uma vez por parcela; adote a direita como sentido positivo.

2 Organizar

Dados $q_A = +4\,\text{nC}$ em $x = 0$
$q_B = -2\,\text{nC}$ em $x = 0{,}3\,\text{m}$
$q_C = +6\,\text{nC}$ em $x = 0{,}7\,\text{m}$
$r_{AB} = 0{,}3\,\text{m}$
$r_{CB} = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4\,\text{m}$.

Conversões $1\,\text{nC} = 10^{-9}\,\text{C}$: $|q_A| = 4\times10^{-9}$, $|q_B| = 2\times10^{-9}$ e $|q_C| = 6\times10^{-9}\,\text{C}$.

Estratégia calcule os dois módulos pela Equação (8.3), atribua o sinal de cada um pelo sentido da atração e some algebricamente.

3 **Resolver**

Atração de q_A sobre q_B. Dirigida para a esquerda:

$$\begin{aligned} F_{A\to B} &= 9\times10^{9}\times\frac{4\times10^{-9}\times2\times10^{-9}}{(0{,}3)^2}\\ &= \frac{72\times10^{-9}}{0{,}09}\\ &= 8{,}0\times10^{-7}\,\text{N}\end{aligned}$$

Atração de q_C sobre q_B. Dirigida para a direita:

$$\begin{aligned} F_{C\to B} &= 9\times10^{9}\times\frac{6\times10^{-9}\times2\times10^{-9}}{(0{,}4)^2}\\ &= \frac{108\times10^{-9}}{0{,}16}\\ &= 6{,}75\times10^{-7}\,\text{N}\end{aligned}$$

Soma com sinal. Positivo para a direita:

$$F_{res} = +6{,}75\times10^{-7} - 8{,}0\times10^{-7}$$

$$\boxed{F_{res} = -1{,}25\times10^{-7}\,\text{N}}$$

O sinal negativo diz para onde a resultante aponta.

A resultante aponta para a esquerda, em direção a q_A.

4 **Avaliar**

Avalie a coerência comparando as duas parcelas antes de olhar a conta. A carga q_C tem módulo maior, 6 contra 4 nC, fator 1,5 a seu favor. Mas está mais longe, 0,4 contra 0,3 m, fator $(0{,}4/0{,}3)^2 \approx 1{,}78$ contra. Como a desvantagem da distância é maior, q_A tinha mesmo de vencer, e a resultante aponta para ela. A resultante, $1{,}25\times10^{-7}$ N, é bem menor que qualquer uma das parcelas, porque elas quase se anulam.

Cuidado com a pegadinha: somar os módulos daria $1{,}48\times10^{-6}$ N. As duas forças só se somariam se q_B estivesse fora do segmento entre q_A e q_C. Desenhe as setas antes de somar.

EXEMPLO 8.6 • Como a força muda quando a carga e a distância mudam

Duas esferas condutoras idênticas, A e B, estão eletrizadas com cargas positivas de mesmo módulo e separadas por uma distância d. A força de repulsão entre elas tem módulo F. Uma terceira esfera C, idêntica às outras e neutra, é encostada em A e depois afastada. Mantida a distância d entre A e B, determine a nova força de repulsão entre elas.

1 Compreender

O assunto é a **proporcionalidade** da Lei de Coulomb, sem valor numérico.

Objetivo. Obter a fração de F que sobra depois de C levar metade da carga de A. O que está em jogo é encadear dois resultados: o contato entre condutores idênticos altera a carga de A, e a força responde em proporção ao produto das cargas, então dividir uma delas por dois divide a força por dois.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.3) e diga o que cada símbolo significa. A carga nova de A vem da Equação (8.2).

2 Organizar

Dados $q_A = q_B = q$
distância d, mantida
força inicial F
esfera C idêntica e neutra encostada em A.

Conversões nenhuma: a questão é literal, em função de q e d.

Estratégia calcule a carga de A depois do contato pela Equação (8.2), escreva a força nova e divida pela força antiga para que k, q e d se simplifiquem.

3 Resolver

Força antes do contato. Escreva-a:

$$F = k\,\frac{q \cdot q}{d^2}$$

Carga de A depois do contato. A esfera neutra C leva metade:

$$\begin{aligned} q'_A &= \frac{q + 0}{2} \\ &= \frac{q}{2} \end{aligned}$$

Força depois do contato. Escreva-a e divida pela antiga:

$$F' = k\,\frac{(q/2)\cdot q}{d^2}$$
$$\frac{F'}{F} = \frac{k\,q^2/2d^2}{k\,q^2/d^2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$\boxed{F' = \frac{F}{2}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo sentido físico: tirando carga de uma das esferas, a repulsão só pode diminuir. A carga de B não mudou, e é por isso que a força cai à metade e não a um quarto. Guarde as duas proporcionalidades separadas, porque a banca as combina: a força é proporcional a cada carga, então dividir uma delas por dois divide F por dois; e é inversamente proporcional ao quadrado da distância, então dobrar d divide F por quatro.

Cuidado com a pegadinha: a alternativa $F/4$ aparece em quase toda questão desse tipo. Ela premia quem divide as *duas* cargas por dois ou confunde carga com distância. Só a esfera tocada muda de carga.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014

Duas partículas metálicas X e Y, inicialmente neutras, foram eletrizadas. A partícula X perdeu $2{,}50\times10^{10}$ elétrons, e a partícula Y ganhou $2{,}50\times10^{10}$ elétrons.

Qual será, aproximadamente, em newtons, o módulo da força de interação elétrica entre as partículas X e Y se elas forem colocadas a 2,00 cm uma da outra no vácuo?

(A) 0,00
(B) $7{,}20\times10^{-6}$
(C) $1{,}41\times10^{-5}$
(D) $3{,}60\times10^{-4}$
(E) 9,00

JC5BQ5

8.3 Campo Elétrico

A Lei de Coulomb responde qual é a força entre duas cargas, mas deixa uma pergunta incômoda: como uma carga sabe que a outra está lá, se nada as liga? Faraday respondeu que a carga **altera o espaço à sua volta**, criando um **campo elétrico**, e que qualquer outra carga colocada nesse espaço interage com o campo do lugar onde ela está, não com a carga distante. O campo deixa de ser um artifício de cálculo e passa a ser a grandeza física central do capítulo.

DEFINIÇÃO 8.4 • Campo Elétrico

O **campo elétrico** num ponto é a força elétrica por unidade de carga que uma carga de prova positiva sofreria se fosse colocada ali. É uma grandeza vetorial, e o seu valor pertence ao *ponto* do espaço, não à carga que o criou nem à carga de prova: retirada a carga de prova, o campo continua lá. O sentido do campo é o da força sobre uma carga positiva.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \qquad \text{e, portanto,} \qquad \vec{F} = q\,\vec{E} \tag{8.4}$$

$\vec{E}$: campo elétrico no ponto (N/C = V/m)
$\vec{F}$: força elétrica sobre a carga colocada no ponto (N)
q_0: carga de prova, positiva (C)
q: carga colocada no ponto, com sinal (C)

A segunda forma, $\vec{F} = q\,\vec{E}$, é a que resolve problemas: conhecido o campo do lugar, ela dá a força sobre qualquer carga posta ali. Se q for positiva, a força tem o sentido do campo. Se q for negativa, a força tem o sentido oposto ao do campo.

DEFINIÇÃO 8.5 • Campo de uma Carga Puntiforme

O campo criado por uma carga puntiforme tem módulo proporcional à carga e inversamente proporcional ao quadrado da distância. A direção é radial, ao longo da reta que une a carga ao ponto. O sentido é de afastamento quando a carga fonte é positiva e de aproximação quando é negativa.

$$E = k\,\frac{|Q|}{r^2} \tag{8.5}$$

E: módulo do campo no ponto (N/C)
k: constante eletrostática do vácuo, 9×10^9 (N · m^2/C^2)

$|Q|$: módulo da carga que cria o campo (C)
r: distância da carga ao ponto (m)

Quando várias cargas criam campo no mesmo ponto, vale o princípio da superposição outra vez: o campo resultante é a soma vetorial dos campos que cada carga criaria sozinha.

8.3.1 Linhas de campo elétrico

As **linhas de campo** tornam o campo visível. São curvas traçadas de modo que o vetor $\vec{E}$ seja tangente a elas em cada ponto, e obedecem a quatro regras que a banca cobra em questões conceituais: saem das cargas positivas e entram nas negativas; nunca se cruzam, porque o campo tem uma única direção em cada ponto; a tangente em cada ponto dá a direção do campo ali; e a densidade de linhas é proporcional à intensidade do campo, de modo que linhas mais juntas significam campo mais forte.

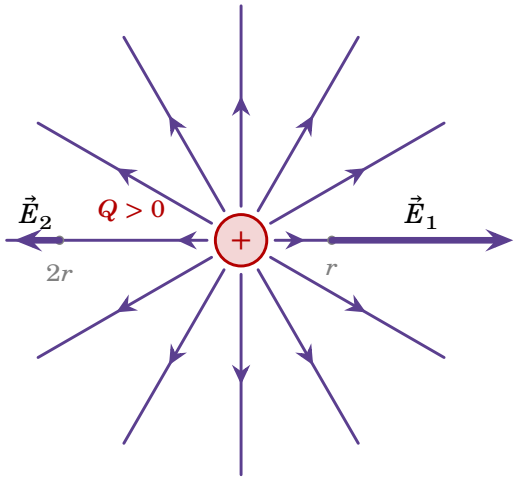


Figura 8.3

8.3.2 Campo uniforme entre placas paralelas

Duas placas condutoras paralelas, planas e ligadas a uma fonte de tensão criam entre si um campo **uniforme**: mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido em todos os pontos da região central. É a única configuração deste capítulo em que o campo não depende da posição, e por isso é a preferida das questões que pedem trajetórias de partículas.

DEFINIÇÃO 8.6 • Campo Elétrico Uniforme

Entre duas placas paralelas separadas por uma distância d e submetidas a uma diferença de potencial U, o campo é uniforme e tem módulo igual à razão entre essa tensão e essa separação. As linhas de campo são retas paralelas, igualmente espaçadas, dirigidas da placa positiva para a negativa. Perto das bordas o campo deixa de ser uniforme, e por isso a fórmula vale para a região central.

$$E = \frac{U}{d} \tag{8.6}$$

E: módulo do campo uniforme (V/m)
U: diferença de potencial entre as placas (V)
d: distância entre as placas (m)

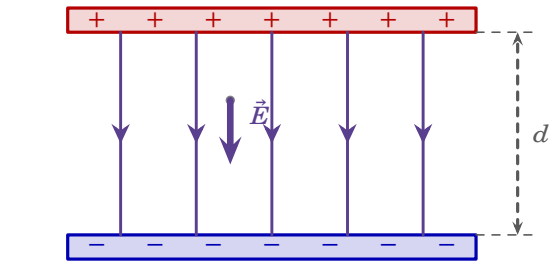


Figura 8.4

EXEMPLO 8.7 • Campo de uma carga puntiforme

Uma carga puntiforme $Q = +5{,}0\,\text{nC}$ está fixa no vácuo. Determine o módulo do campo elétrico no ponto P, situado a 0,20 m da carga, e o sentido do vetor $\vec{E}$ nesse ponto.

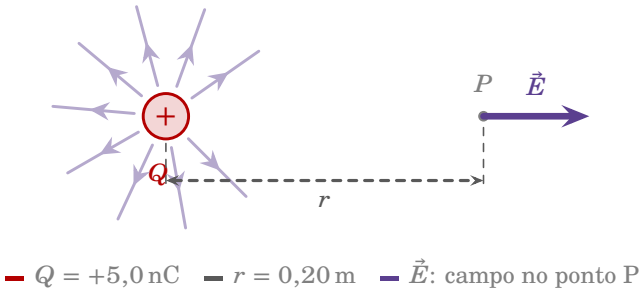


Figura 8.5

NOTA

As duas unidades do campo elétrico são a mesma coisa: 1 N/C = 1 V/m. Use N/C quando o problema falar em força sobre uma carga e V/m quando falar em tensão e distância. Se o enunciado misturar as duas linguagens, a igualdade das unidades é justamente a ponte que ele quer que você atravesse.

1 Compreender

O assunto é o **campo de uma carga puntiforme**: não existe carga de prova em P, e o campo está lá de qualquer modo.

Objetivo. Obter a intensidade do campo a vinte centímetros da carga e o sentido do vetor em P. O que está em jogo é o sentido vem do sinal da fonte: positiva, o campo aponta para fora dela, de Q para P e além.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.5) e diga o que cada símbolo significa. A carga entra em coulombs e a distância em metros.

2 Organizar

Dados $Q = +5{,}0\,\text{nC}$
$r = 0{,}20\,\text{m}$
$k = 9 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

Conversões $|Q| = 5{,}0\,\text{nC} = 5{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C}$.

Estratégia substitua na Equação (8.5) e decida o sentido pelo sinal de Q.

3 Resolver

Módulo do campo. Escreva a equação e substitua:

$$\begin{aligned} E &= k\,\frac{|Q|}{r^2} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{5{,}0 \times 10^{-9}}{(0{,}20)^2} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{5{,}0 \times 10^{-9}}{0{,}040} \\ &= \frac{45}{0{,}040} \end{aligned}$$

$$E = 1\,125\,\text{N/C}$$

Sentido. O sinal de Q decide o sentido do vetor.

Como Q é positiva, $\vec{E}$ aponta radialmente para fora, no sentido de Q para P.

4 Avaliar

Avalie a coerência pela dependência com a distância. Se você levasse o ponto para 0,40 m, o dobro, o campo cairia a um quarto, 281 N/C, e não à metade. Essa queda rápida é a assinatura da lei do inverso do quadrado e faz o campo de uma carga isolada ser irrelevante a alguns metros. Guarde a diferença que a banca cobra: o campo cai com $1/r^2$; o potencial, na próxima seção, cai com $1/r$.

Cuidado com a pegadinha: elevar ao quadrado só o número e esquecer a unidade leva a $(0{,}20)^2 = 0{,}4$ em vez de 0,040, e o campo sai dez vezes menor. Escreva $0{,}20 \times 0{,}20$ por extenso quando a distância for menor que 1.

> **EXEMPLO 8.8** • Ponto em que o campo resultante se anula
>
> Duas cargas positivas estão fixas sobre um eixo: $q_1 = +9\,\text{nC}$ em $x = 0$ e $q_2 = +4\,\text{nC}$ em $x = 0{,}50\,\text{m}$. Determine a posição do ponto do segmento entre elas em que o campo elétrico resultante é nulo.

1 Compreender

O assunto é a **superposição de campos**: num ponto entre duas cargas positivas, o campo de q_1 aponta para a direita e o de q_2 para a esquerda, então os dois podem se anular.

Objetivo. Obter a distância de q_1 em que os dois módulos se igualam. O que está em jogo é saber onde procurar: só no segmento entre as cargas os campos têm sentidos opostos, e, como os módulos das cargas são diferentes, o ponto em que o campo se anula fica mais perto da carga menor.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.5) e diga o que cada símbolo significa. Uma vez para cada carga, igualadas em P.

2 Organizar

Dados $q_1 = 9\,\text{nC}$ em $x = 0$
$q_2 = 4\,\text{nC}$ em $x = 0{,}50\,\text{m}$
ponto P entre as duas, a uma distância x de q_1 e $(0{,}50 - x)$ de q_2.

Conversões nenhuma: as cargas só aparecem em razão, e as distâncias em metros.

Estratégia iguale os dois módulos dados pela Equação (8.5), simplifique k, que aparece dos dois lados, e extraia a raiz quadrada para cair numa equação de primeiro grau.

3 Resolver

Igualdade dos módulos em P. Escreva-a:

$$k\,\frac{q_1}{x^2} = k\,\frac{q_2}{(0{,}50 - x)^2}$$

Simplificação. Divida os dois lados por k e substitua as cargas em nanocoulombs, que também se simplificam por serem a mesma

unidade:

$$\frac{9}{x^2} = \frac{4}{(0{,}50 - x)^2}$$

Raiz quadrada e equação do primeiro grau. Extraia a raiz dos dois lados, o que é lícito porque as duas distâncias são positivas:

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} &= \frac{2}{0{,}50 - x} \\ 3\,(0{,}50 - x) &= 2x \\ 1{,}50 &= 5x \end{aligned}$$

$$\boxed{x = 0{,}30\,\text{m}}$$

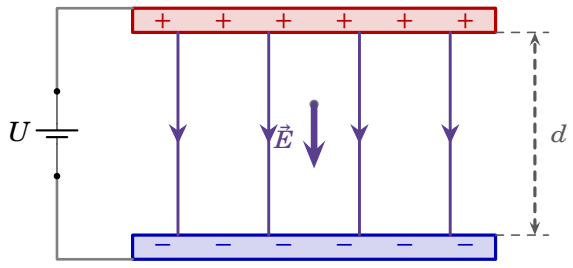
4 Avaliar

Avalie a coerência pela posição encontrada. O ponto ficou a 0,30 m de q_1 e a 0,20 m de q_2, mais perto da carga menor, como a intuição pedia: para compensar uma carga maior, a menor precisa da ajuda da proximidade. Confira: $9/(0{,}30)^2 = 100$ e $4/(0{,}20)^2 = 100$. A razão das distâncias, $0{,}30/0{,}20 = 1{,}5$, é a raiz da razão das cargas, $\sqrt{9/4} = 1{,}5$, atalho que resolve a questão em segundos quando as cargas forem quadrados perfeitos.

Cuidado com a pegadinha: quem resolve a equação do segundo grau sem simplificar encontra uma segunda raiz, $x = 1{,}5$ m, fora do segmento. Como as duas cargas são positivas, o único ponto de campo nulo está entre elas.

EXEMPLO 8.9 • Campo uniforme entre placas paralelas

Duas placas metálicas paralelas estão separadas por $d = 2{,}0$ cm e ligadas a uma bateria de 100 V. Determine o campo elétrico uniforme entre elas e a força que ele exerce sobre uma partícula de carga $q = +1{,}0\,\mu$C colocada na região central.



$\vec{E}$: campo, do + para o − $U = 100$ V, $d = 2{,}0$ cm

Figura 8.6

1 Compreender

O assunto é o **campo uniforme entre placas** e, em seguida, a relação $\vec{F} = q\vec{E}$.

Objetivo. Obter o campo entre as placas e a força que ele faz sobre um microcoulomb. O que está em jogo é ver que a bateria fixa a tensão, que a tensão dividida pela separação dá o campo, e que, por ser uniforme, a força é a mesma em qualquer ponto da região central.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.6) e diga o que cada símbolo significa. A força vem da Equação (8.4), na forma $F = qE$.

2 Organizar

Dados $U = 100\,\text{V}$
$d = 2{,}0\,\text{cm}$
$q = +1{,}0\,\mu\text{C}$.

Conversões $d = 2{,}0\,\text{cm} = 0{,}020\,\text{m}$
$q = 1{,}0\,\mu\text{C} = 1{,}0 \times 10^{-6}\,\text{C}$.

Estratégia aplique a Equação (8.6) e leve o resultado à Equação (8.4) na forma $F = qE$.

3 Resolver

Campo entre as placas. Divida a tensão pela separação:

$$\begin{aligned} E &= \frac{U}{d} \\ &= \frac{100}{0{,}020} \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 5\,000\,\text{V/m}}$$

Força sobre a partícula. Multiplique a carga pelo campo, lembrando que $1\,\text{V/m} = 1\,\text{N/C}$:

$$\begin{aligned} F &= q\,E \\ &= 1{,}0 \times 10^{-6} \times 5\,000 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 5{,}0 \times 10^{-3}\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência das duas contas. Cem volts espalhados por dois centímetros dão milhares de volts por metro, o que confirma que campos altos se obtêm com tensões modestas desde que a separação seja pequena. E a força, cinco milinewtons, é desprezível para um

corpo de escala humana e enorme para uma partícula de poeira, que é justamente o princípio do precipitador eletrostático: a partícula é primeiro carregada por um eletrodo e só então arrastada pelo campo até a placa coletora. Precipitadores industriais operam com campos da ordem de 10^5 a 10^6 V/m, obtidos com dezenas de quilovolts entre o fio e a placa.

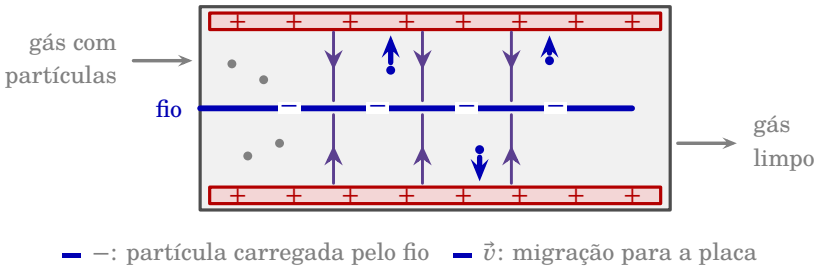


Figura 8.7

8.4 Potencial Elétrico e Energia

Até aqui o capítulo descreveu o espaço em volta de uma carga por meio de vetores. Existe uma segunda descrição, escalar, que retoma a energia potencial do cap. 4 e costuma ser bem mais rápida: em vez de perguntar que força age num ponto, ela pergunta quanta energia uma carga teria ali. Somar escalares dispensa decompor em eixos, e é por isso que a banca gosta de problemas que parecem de campo e se resolvem por potencial.

DEFINIÇÃO 8.7 • Energia Potencial Elétrica

Duas cargas puntiformes separadas por uma distância guardam uma **energia potencial elétrica**, que é o trabalho que seria necessário para trazê-las do infinito até essa distância. Diferente da força, essa energia carrega os **sinais** das duas cargas: é positiva para cargas de mesmo sinal, que precisam ser empurradas uma contra a outra, e negativa para cargas de sinais opostos, que se aproximam sozinhas. O nível zero fica no infinito.

$$E_{pel} = k\,\frac{Q\,q}{r} \tag{8.7}$$

E_{pel}: energia potencial elétrica do par (J)
k: constante eletrostática do vácuo, 9×10^9 (N · m^2/C^2)
Q, q: cargas do par, *com* sinal (C)
r: distância entre elas (m)

CUIDADO

Compare a Equação (8.7) com a Equação (8.3): a energia tem r no denominador, a força tem r^2, e a energia entra com sinal enquanto a força entra com módulo. Trocar um pelo outro é o erro mais caro deste capítulo, porque o resultado sai com a unidade errada sem que a conta pareça errada.

Num sistema de três ou mais cargas, a energia total é a soma escalar de uma parcela por **par** de cargas, e não uma soma vetorial. Com três cargas há três pares, e portanto três parcelas.

DEFINIÇÃO 8.8 • Potencial Elétrico

O **potencial elétrico** num ponto é a energia potencial elétrica por unidade de carga colocada ali. É um escalar, medido em volts, e como o campo elétrico ele pertence ao ponto, não à carga de prova. Para uma carga puntiforme, o potencial cai com o inverso da distância e tem o sinal da carga que o cria: é positivo em volta de uma carga positiva, negativo em volta de uma negativa, e tende a zero muito longe da fonte.

$$V = \frac{E_{pel}}{q} \tag{8.8}$$

$$V = k\,\frac{Q}{r} \tag{8.9}$$

V: potencial elétrico no ponto (V = J/C)
E_{pel}: energia potencial elétrica da carga naquele ponto (J)
q: carga colocada no ponto, com sinal (C)
Q: carga que cria o potencial, *com* sinal (C)
r: distância da carga ao ponto (m)

NOTA

Campo e potencial descrevem a mesma realidade e caem com potências diferentes: $E \propto 1/r^2$ e $V \propto 1/r$. Dobrar a distância divide o campo por quatro e o potencial por dois. Quando várias cargas atuam, os potenciais se somam algebricamente, com sinal, sem nenhuma decomposição, e essa é a vantagem prática do potencial sobre o campo.

8.4.1 Diferença de potencial e trabalho

A **diferença de potencial** entre dois pontos A e B, escrita U_{AB} ou simplesmente U, é o que os instrumentos medem e o que as fontes fornecem. Ela vale $V_A - V_B$ e é a grandeza que aparece na placa de todo equipamento elétrico. O potencial isolado de um ponto depende de onde se põe o zero, mas a diferença entre dois pontos não depende de nada disso, e é por isso que ela é a grandeza útil.

DEFINIÇÃO 8.9 • Trabalho do Campo Elétrico

O trabalho realizado pela força elétrica ao deslocar uma carga de um ponto A até um ponto B depende apenas dos potenciais dos dois pontos, e não do caminho seguido. A força elétrica é conservativa, exatamente como o peso do cap. 4. O trabalho é positivo quando a carga vai espontaneamente, isto é, quando o campo ajuda, e negativo quando é preciso empurrá-la contra o campo.

$$W_{A\to B} = q\,(V_A - V_B) = q\,U_{AB} \tag{8.10}$$

$W_{A\to B}$: trabalho da força elétrica de A até B (J)
q: carga deslocada, *com* sinal (C)
V_A, V_B: potenciais nos pontos inicial e final (V)
U_{AB}: diferença de potencial $V_A - V_B$ (V)

A variação da energia potencial elétrica é o oposto desse trabalho, como em toda força conservativa:

$$\Delta E_{pel} = E_{pel,B} - E_{pel,A} = -\,W_{A\to B} = q\,(V_B - V_A)$$

ATENÇÃO

Guarde as três consequências que a banca cobra:

- uma carga **positiva** vai espontaneamente do maior para o menor potencial, como a água desce um desnível;
- uma carga **negativa** vai espontaneamente do menor para o maior potencial, ao contrário;
- nos dois casos o movimento espontâneo tem trabalho positivo e *reduz* a energia potencial do sistema, que se converte em energia cinética.

8.4.2 Superfícies equipotenciais

As **superfícies equipotenciais** reúnem os pontos de mesmo potencial. Em volta de uma carga puntiforme elas são esferas concêntricas, que no papel aparecem como circunferências. Duas propriedades saem direto da Equação (8.10): as linhas de campo são sempre **perpendiculares** às equipotenciais, e o trabalho para deslocar uma carga *sobre* uma equipotencial é zero, porque $V_A = V_B$ e a diferença se anula. Não importa o comprimento do percurso nem a carga deslocada.

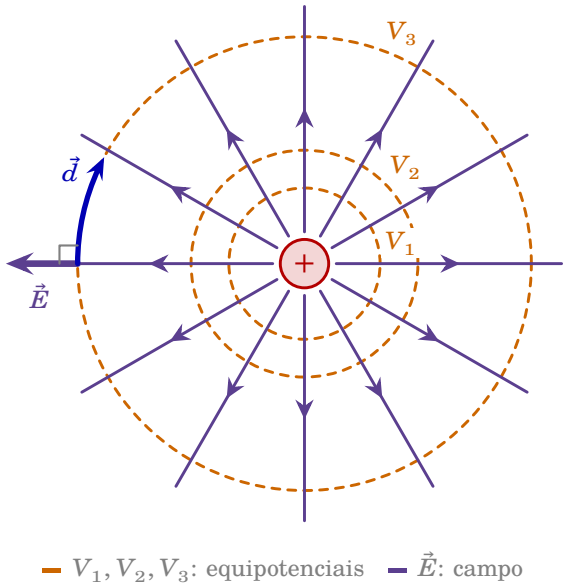


Figura 8.8

EXEMPLO 8.10 • Potencial de uma carga puntiforme e ddp

Uma carga puntiforme $Q = +8{,}0\,\text{nC}$ está fixa no vácuo. Determine (a) o potencial no ponto P, a 0,40 m da carga, e (b) a diferença de potencial entre P e o ponto R, situado a 0,80 m da carga.

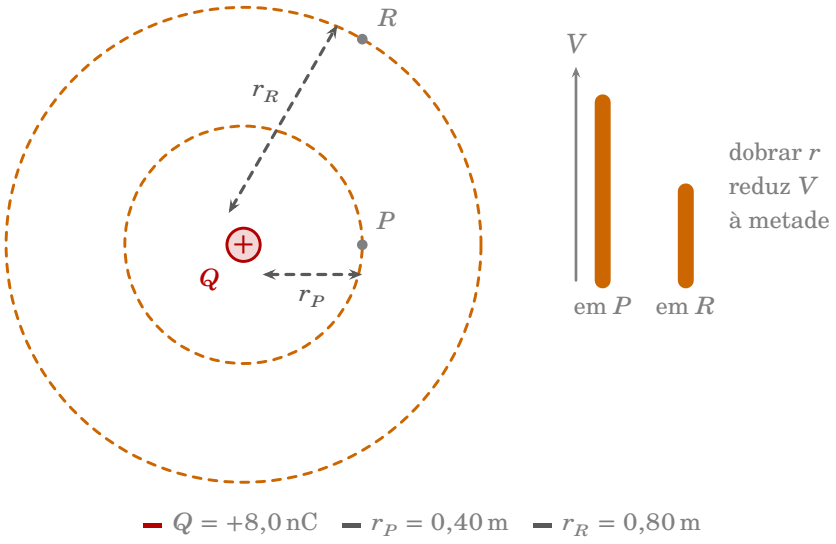


Figura 8.9

1 Compreender

O assunto é o **potencial de uma carga puntiforme** e a ddp entre dois pontos.

Objetivo. Obter o potencial em P e quanto ele cai de P até R. O que está em jogo é ver que o potencial é escalar e só depende da distância à carga: a figura põe R numa direção diferente da de P de propósito,

e isso não muda nada.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.9) e diga o que cada símbolo significa. Com a fonte positiva, os dois potenciais são positivos e o ponto mais próximo tem o maior.

2 Organizar

Dados $Q = +8{,}0\,\text{nC}$
$r_P = 0{,}40\,\text{m}$
$r_R = 0{,}80\,\text{m}$
$k = 9 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

Conversões $Q = 8{,}0\,\text{nC} = 8{,}0 \times 10^{-9}\,\text{C}$.

Estratégia aplique a Equação (8.9) nos dois pontos, com o sinal da carga, e subtraia os dois resultados.

3 Resolver

(a) Potencial em P. Calcule-o:

$$\begin{aligned} V_P &= k\,\frac{Q}{r_P} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{8{,}0 \times 10^{-9}}{0{,}40} \\ &= \frac{72}{0{,}40} \end{aligned}$$

$$\boxed{V_P = 180\,\text{V}}$$

(b) Potencial em R. Ao dobro da distância:

$$\begin{aligned} V_R &= k\,\frac{Q}{r_R} \\ &= 9 \times 10^9 \times \frac{8{,}0 \times 10^{-9}}{0{,}80} \\ &= 90\,\text{V} \end{aligned}$$

Diferença de potencial. Subtraia:

$$\begin{aligned} U_{PR} &= V_P - V_R \\ &= 180 - 90 \end{aligned}$$

$$\boxed{U_{PR} = 90\,\text{V}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela dependência com a distância. Ao dobrar r, o potencial caiu exatamente à metade, de 180 para 90 V, como $V \propto 1/r$ exige. Compare com o Exemplo 8.7: lá, dobrar a distância dividiu o *campo* por quatro. Confundir as duas quedas é o erro que a banca mais explora nesta seção. E dê sentido físico ao resultado: como U_{PR} é positiva, levar uma carga positiva de P para R é espontâneo, e trazê-la de R de volta para P custa 90 J por coulomb transportado.

EXEMPLO 8.11 • Energia potencial de um sistema de três cargas

Três cargas puntiformes ocupam os vértices de um triângulo equilátero de lado $a = 0{,}3\,\text{m}$: $q_1 = +2\,\mu\text{C}$, $q_2 = +3\,\mu\text{C}$ e $q_3 = -4\,\mu\text{C}$. Determine a energia potencial elétrica do sistema.

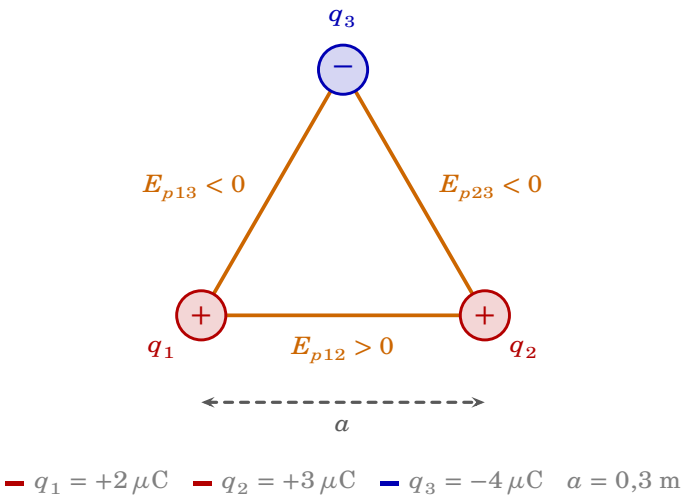


Figura 8.10

1 Compreender

O assunto é a **energia potencial elétrica de um sistema**, soma escalar de uma parcela por par de cargas.

Objetivo. Obter a energia guardada nessa configuração. O que está em jogo é contar os pares e respeitar os sinais: com três cargas existem três pares, cada parcela entra com o sinal do produto das duas cargas, e não há decomposição em eixos, porque energia é escalar.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.7) e diga o que cada símbolo significa. Como o triângulo é equilátero, as três distâncias são iguais a a, e k/a pode ser posto em evidência.

2 Organizar

Dados $q_1 = +2\,\mu\text{C}$
$q_2 = +3\,\mu\text{C}$

$q_3 = -4\,\mu\text{C}$
$a = 0{,}3\,\text{m}$ entre quaisquer duas
$k = 9 \times 10^9\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2$.

Conversões cargas em μC: os produtos saem em $10^{-12}\,\text{C}^2$.

Estratégia escreva as três parcelas pela Equação (8.7), ponha k/a em evidência e some os três produtos de cargas com os sinais.

3 Resolver

Soma dos três pares. Escreva-a e ponha k/a em evidência:

$$\begin{aligned} E_{pel} &= k\,\frac{q_1 q_2}{a} + k\,\frac{q_1 q_3}{a} + k\,\frac{q_2 q_3}{a} \\ &= \frac{k}{a}\,(q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3) \end{aligned}$$

Produtos de cargas. Some os três, respeitando os sinais. Em $10^{-12}\,\text{C}^2$, eles valem $(+2)(+3) = 6$, $(+2)(-4) = -8$ e $(+3)(-4) = -12$:

$$\begin{aligned} q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3 &= (6 - 8 - 12) \times 10^{-12} \\ &= -14 \times 10^{-12}\,\text{C}^2 \end{aligned}$$

Energia total. Substitua o fator k/a e multiplique:

$$\begin{aligned} E_{pel} &= \frac{9 \times 10^9}{0{,}3} \times (-14 \times 10^{-12}) \\ &= 3 \times 10^{10} \times (-14 \times 10^{-12}) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{pel} = -0{,}42\,\text{J}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo sinal, a informação principal aqui. Só a parcela do par $q_1 q_2$ é positiva, porque só ele reúne cargas de mesmo sinal; as outras duas são atrativas. Como as atrações somam 20 contra 6 da repulsão, o sistema é ligado e a energia sai negativa: seria preciso *fornecer* 0,42 J de fora para levar as três cargas para muito longe, a mesma leitura da energia de ligação de um átomo ou de um satélite.

Cuidado com a pegadinha: não existe parcela $q_1 q_1$, nem se conta o mesmo par duas vezes: três cargas, três pares; quatro, seis. E use os sinais das cargas aqui, ao contrário da Lei de Coulomb, onde entram só os módulos.

EXEMPLO 8.12 • Trabalho do campo ao deslocar cargas

Entre dois pontos A e B de um campo elétrico existe a diferença de potencial $V_A - V_B = 12\,\text{V}$. Calcule o trabalho realizado pela força elétrica ao deslocar (a) uma carga $+2{,}0\,\text{C}$ de A para B e (b) uma carga $-3{,}0\,\text{C}$ de B para A.

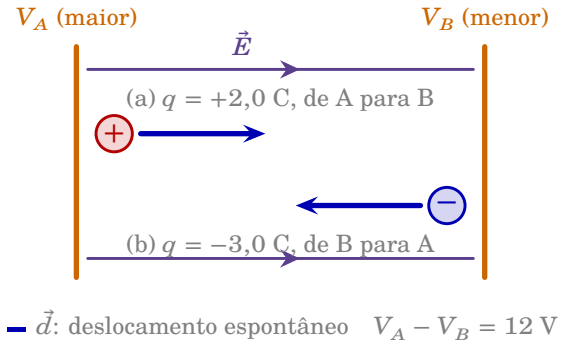


Figura 8.11

1 Compreender

O assunto é o **trabalho do campo elétrico com controle de sinais**, o assunto mais escorregadio do capítulo.

Objetivo. Obter o trabalho da força elétrica em cada deslocamento e dizer se o campo ajuda ou atrapalha. O que está em jogo é combinar dois sinais, o da carga e o da diferença de potencial, e escrever a ddp na ordem do percurso: no item (b) ele é de B para A, o inverso do item (a).

Antes de seguir, escreva a Equação (8.10) e diga o que cada símbolo significa. A ddp é sempre potencial de onde a carga sai menos potencial de onde ela chega.

2 Organizar

Dados $V_A - V_B = 12\,\text{V}$
item (a) $q = +2{,}0\,\text{C}$, percurso de A para B
item (b) $q = -3{,}0\,\text{C}$, percurso de B para A, logo $V_B - V_A = -12\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: coulomb vezes volt dá joule.

Estratégia escreva a diferença de potencial sempre como "potencial de onde a carga sai menos potencial de onde ela chega" e multiplique pela carga, com o sinal dela.

3 **Resolver**

(a) Carga positiva de A para B. A diferença é $V_A - V_B$:

$$\begin{aligned} W &= q\,(V_A - V_B) \\ &= (+2{,}0) \times (+12) \end{aligned}$$

$$\boxed{W = +24\,\text{J}}$$

(b) Carga negativa de B para A. A diferença é $V_B - V_A = -12\,\text{V}$, e a carga também é negativa:

$$\begin{aligned} W &= q\,(V_B - V_A) \\ &= (-3{,}0) \times (-12) \end{aligned}$$

$$\boxed{W = +36\,\text{J}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelo sentido espontâneo de cada carga. No item (a) a carga positiva desce do potencial maior para o menor, movimento natural dela, e o trabalho sai positivo. No item (b) a carga negativa sobe do potencial menor para o maior, movimento natural *dela*, e o trabalho também sai positivo. Deslocamentos opostos, ambos espontâneos: na Equação (8.10), quem decide o sinal é o produto dos dois sinais, não a direção do movimento. Nos dois casos a energia potencial vira cinética.

Cuidado com a pegadinha: usar $V_A - V_B = +12\,\text{V}$ também no item (b) dá $-36\,\text{J}$, valor que está entre as alternativas. Escreva a ddp na ordem do percurso.

EXEMPLO 8.13 • Elétron acelerado por uma diferença de potencial

Um elétron, de carga $q = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ e massa $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$, parte do repouso no ponto A e se move até o ponto B, onde o potencial é 100 V mais alto, isto é, $V_B - V_A = 100\,\text{V}$. Determine a velocidade do elétron ao chegar em B.

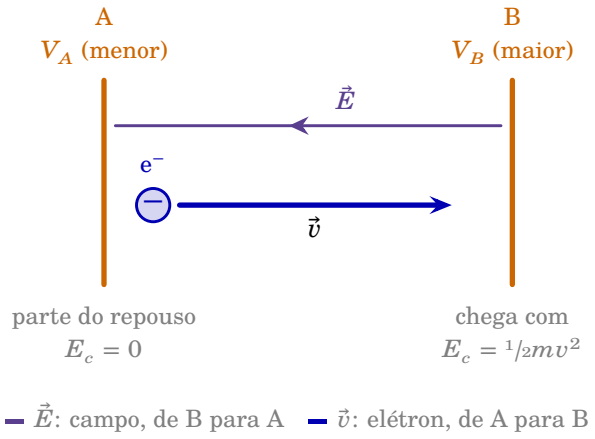


Figura 8.12

1 Compreender

O assunto é o **trabalho do campo elétrico** ligado ao **teorema do trabalho e energia cinética** do cap. 4.

Objetivo. Obter a velocidade com que o elétron chega em B. O que está em jogo é ver que o elétron, negativo, vai espontaneamente do potencial menor para o maior, que é o percurso descrito, e que, partindo do repouso, todo o trabalho vira energia cinética; o peso dele é desprezível.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.10) e diga o que cada símbolo significa. O trabalho entra na Equação (4.3), do cap. 4.

2 Organizar

Dados $q = -1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$
$m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$
$V_B - V_A = 100\,\text{V}$, logo $V_A - V_B = -100\,\text{V}$
velocidade inicial nula.

Conversões nenhuma: tudo no SI.

Estratégia calcule o trabalho pela Equação (8.10), com os dois sinais negativos, iguale-o à energia cinética final e isole v.

3 **Resolver**

Trabalho da força elétrica. No percurso de A para B:

$$\begin{aligned} W &= q\,(V_A - V_B) \\ &= (-1{,}6\times10^{-19})\times(-100) \\ &= 1{,}6\times10^{-17}\,\text{J} \end{aligned}$$

Velocidade pelo teorema do trabalho e energia. Iguale o trabalho à energia cinética adquirida e isole v:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= W \\ v &= \sqrt{\frac{2W}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{2\times1{,}6\times10^{-17}}{9{,}1\times10^{-31}}} \\ &= \sqrt{3{,}52\times10^{13}} \end{aligned}$$

$$v \approx 5{,}9\times10^{6}\ \text{m/s}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelos dois sinais negativos que se multiplicaram: trabalho negativo significaria um elétron perdendo energia, incapaz de partir do repouso e ganhar velocidade. E avalie a ordem de grandeza: $5{,}9\times10^{6}$ m/s são cerca de 2% da velocidade da luz, com apenas cem volts. É por isso que tubos de raios catódicos, com dezenas de milhares de volts, exigiam blindagem contra raios X, e é o princípio dos detectores de ionização da instrumentação de processo.

Cuidado com a pegadinha: a carga sem o sinal, ou $V_A - V_B = +100\,\text{V}$, produz trabalho negativo e raiz de número negativo. Não force o sinal no final: volte e confira o ponto de partida.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Uma partícula de carga elétrica igual a 2,0 C desloca-se de um ponto A para um ponto B, sofrendo uma queda de potencial elétrico de 10 V.

Qual a variação na energia potencial elétrica dessa partícula, em joules, durante o deslocamento?

(A) -40

(B) -20

(C) -5

(D) 5

(E) 20

3QFB6T

8.5 Condutores em Equilíbrio Eletrostático

Num condutor os elétrons se movem livremente. Se houver campo elétrico dentro dele, esses elétrons são empurrados e continuam se movendo, e enquanto isso acontece o condutor não está em equilíbrio. O movimento só cessa quando as cargas se redistribuem de tal modo que o campo interno resultante se anula. É essa a definição de **condutor em equilíbrio eletrostático**, e dela saem todas as propriedades da seção.

DEFINIÇÃO 8.10 • Propriedades do Condutor em Equilíbrio

Num condutor em equilíbrio eletrostático valem cinco afirmações, todas consequência do fato de que os elétrons livres pararam de se mover:

1. o campo elétrico é nulo em todos os pontos internos;
2. o potencial elétrico é o mesmo em todo o condutor, superfície incluída, de modo que o condutor inteiro é uma equipotencial;
3. todo excesso de carga fica na superfície externa;
4. na superfície, o campo externo é perpendicular a ela;
5. a densidade superficial de carga é maior onde a curvatura é maior, isto é, nas pontas.

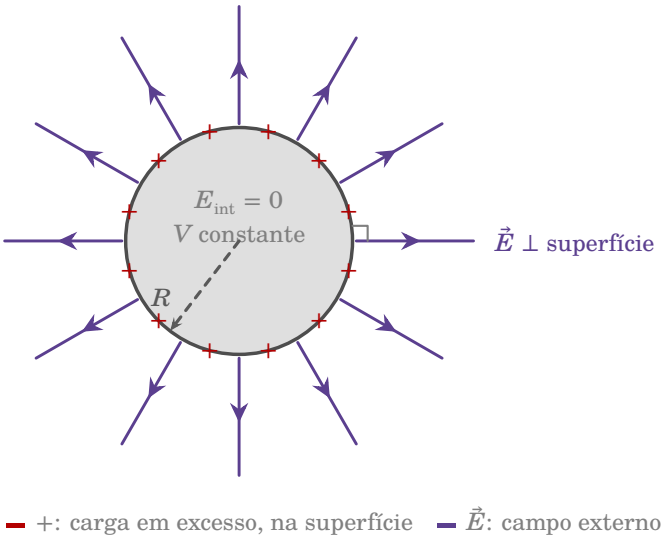


Figura 8.13

8.5.1 Esfera condutora e contato entre condutores diferentes

A propriedade 2 tem uma consequência prática que a banca cobra com frequência. Para uma esfera condutora de raio R com carga Q, o potencial em qualquer ponto interno e na superfície é o mesmo que uma carga puntiforme Q produziria à distância R, e fora dela o potencial cai como o de uma carga puntiforme colocada no centro.

DEFINIÇÃO 8.11 • Potencial de uma Esfera Condutora

O potencial de uma esfera condutora eletrizada é constante em todo o seu interior e igual ao valor da superfície. Quando dois condutores são ligados ou postos em contato, o que se iguala é o **potencial** dos dois, e não a carga. Para duas esferas, isso faz com que a carga se reparta em proporção aos raios: a esfera maior fica com a maior parte.

$$V = k\frac{Q}{R} \tag{8.11}$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \quad \text{com} \quad Q_1 + Q_2 = Q_{\text{total}} \tag{8.12}$$

V: potencial da esfera, interno e na superfície (V)
Q: carga da esfera, com sinal (C)
R: raio da esfera (m)
Q_1, Q_2: cargas depois do contato (C)
R_1, R_2: raios das duas esferas (m)

NOTA

A Equação (8.2), da média aritmética, é o caso particular da Equação (8.12) em que $R_1 = R_2$. Quando o enunciado disser "esferas idênticas", use a média. Quando der raios ou diâmetros diferentes, reparta em proporção aos raios. O diâmetro serve igualmente bem, porque a razão entre diâmetros é a mesma que entre raios.

8.5.2 Efeito das pontas

A propriedade 5 diz que a carga se acumula onde a superfície é mais curva. Numa ponta, essa concentração produz um campo tão intenso que ele arranca elétrons das moléculas do ar vizinho, ionizando-o. O ar ionizado conduz, e a carga escapa continuamente pela ponta, num escoamento chamado **poder das pontas**.

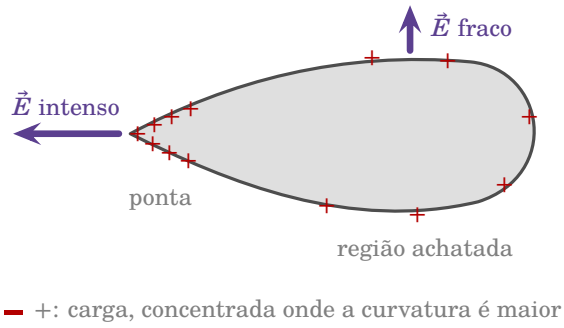


Figura 8.14

Na direção oposta, a diferença de potencial pode ser usada para *proteger* uma estrutura metálica. Na **proteção catódica**, um metal mais reativo é enterrado junto ao duto e ligado a ele: o duto passa a receber elétrons e deixa de se oxidar, enquanto o metal reativo se consome no lugar dele.

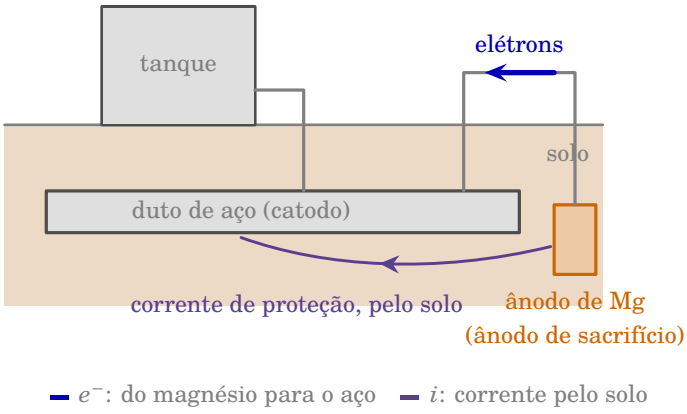


Figura 8.15

NOTA

O para-raios é uma ponta ligada à terra, e faz duas coisas: escoa carga lentamente enquanto a nuvem se aproxima e oferece o caminho preferencial se a descarga vier assim mesmo. O mesmo efeito explica uma regra de projeto em área classificada: equipamentos e tubulações têm cantos arredondados, porque um canto vivo concentra carga estática e pode iniciar a faísca que inflama o vapor de hidrocarboneto.

8.5.3 Blindagem eletrostática e gaiola de Faraday

Uma casca condutora fechada blinda o seu interior de qualquer campo elétrico externo. O mecanismo é a propriedade 1 outra vez: o campo externo separa as cargas livres da casca, que se acomodam nas duas faces até que o campo por elas criado anule exatamente o campo externo em todo o interior. O resultado é $\vec{E} = 0$ dentro, qualquer que seja a intensidade do campo de fora.

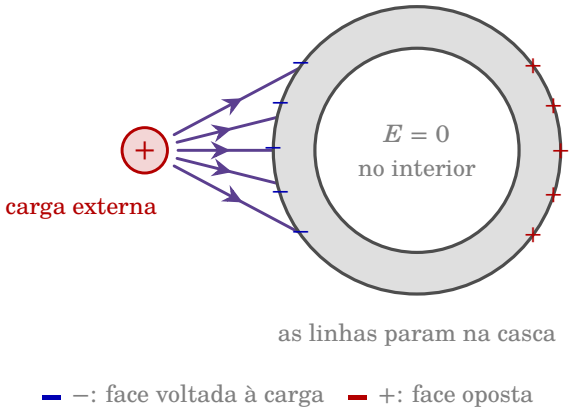


Figura 8.16

A gaiola de Faraday está em toda parte. A carroceria do carro e a fuselagem do avião protegem quem está dentro de uma descarga atmosférica. A malha do cabo coaxial protege o sinal da interferência externa. Salas blindadas isolam equipamentos de medição sensíveis. Em plataformas *offshore*, onde a atividade de raios é alta e não há para onde correr, os módulos metálicos funcionam como gaiolas, e é por isso que a orientação em tempestade é permanecer dentro deles.

EXEMPLO 8.14 • Contato entre esferas de raios diferentes

Uma esfera condutora A, de raio $R_A = 10\,\text{cm}$, está eletrizada com $+9{,}0\,\mu\text{C}$. Ela é ligada por um fio condutor a uma esfera B, de raio $R_B = 20\,\text{cm}$, inicialmente neutra e distante. Determine a carga final de cada esfera depois de restabelecido o equilíbrio.

1 Compreender

O assunto é o **contato entre condutores de tamanhos diferentes**.

Objetivo. Obter como os $9{,}0\,\mu\text{C}$ se repartem entre uma esfera pequena e uma com o dobro do raio. O que está em jogo é não dividir a carga ao meio: o que se iguala é o potencial, e, como $V = kQ/R$, potenciais iguais com raios diferentes exigem cargas diferentes; a carga total se conserva.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.12) e diga o que cada símbolo significa. A esfera de raio maior comporta mais carga no mesmo potencial.

2 Organizar

Dados $R_A = 10\,\text{cm}$
$R_B = 20\,\text{cm}$
$Q_{\text{total}} = +9{,}0\,\mu\text{C}$.

Conversões nenhuma: os raios só aparecem em razão, e a carga fica em μC.

Estratégia escreva a igualdade dos potenciais pela Equação (8.12), obtenha a razão entre as cargas e distribua o total nessa proporção.

3 Resolver

Igualdade dos potenciais. Escreva-a para as duas esferas ligadas:

$$\begin{aligned}\frac{Q_A}{R_A} &= \frac{Q_B}{R_B}\\ Q_B &= Q_A\,\frac{R_B}{R_A}\\ &= Q_A \times \frac{20}{10}\\ &= 2\,Q_A\end{aligned}$$

Conservação da carga. Imponha-a e resolva para Q_A:

$$\begin{aligned}Q_A + Q_B &= 9{,}0\\ Q_A + 2Q_A &= 9{,}0\\ 3Q_A &= 9{,}0\end{aligned}$$

$$\boxed{Q_A = 3{,}0\,\mu\text{C}} \qquad \boxed{Q_B = 6{,}0\,\mu\text{C}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela proporção e pela soma. A esfera B tem o dobro do raio e ficou com o dobro da carga, e as duas parcelas somam os $9{,}0\,\mu$C iniciais, como a conservação exige. Os potenciais se igualaram: $3{,}0/10 = 0{,}30$ e $6{,}0/20 = 0{,}30$. A carga se reparte na razão dos *raios*, não na das áreas nem na dos volumes, porque o potencial é que manda.

Cuidado com a pegadinha: a resposta $4{,}5\,\mu$C em cada esfera vem de aplicar a média aritmética a esferas que não são idênticas. Antes de dividir por dois, confira se o enunciado diz “idênticas” ou dá raios diferentes.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2012

Duas esferas metálicas X e Y encontram-se, inicialmente, eletricamente isoladas. As cargas elétricas e os diâmetros das esferas são listados na tabela abaixo.

G8VZB9

	Carga elétrica (μC)	Diâmetro (cm)
Esfera X	+60	60
Esfera Y	−40	40

Se as esferas entrarem em contato elétrico e, em seguida, forem isoladas novamente, qual será, em μC, a nova carga da esfera Y?

(A) 8,0
(B) 12
(C) 15
(D) 20
(E) 50

8.6 Capacitores

Um **capacitor** é o dispositivo construído para guardar energia no campo elétrico. Ele é feito de dois condutores, chamados **armaduras**, separados por um isolante, o **dielétrico**. Ligado a uma fonte, ele acumula cargas iguais e de sinais opostos nas duas armaduras, e essas cargas mantêm entre si o campo que guarda a energia. Nos circuitos eletrônicos ele aparece o tempo todo, e nas plantas industriais está nos bancos de correção de fator de potência e nos filtros de harmônicas.

DEFINIÇÃO 8.12 • Capacitância

A **capacitância** mede quanta carga um capacitor acumula por volt aplicado entre as armaduras. Ela é uma característica **geométrica** do dispositivo: depende da área das armaduras, da distância entre elas e do dielétrico, e não da tensão nem da carga. Aplicar o dobro da tensão dobra a carga acumulada e deixa a capacitância como estava.

$$C = \frac{Q}{U} \tag{8.13}$$

C: capacitância (F = C/V)

Q: módulo da carga de cada armadura (C)
U: diferença de potencial entre as armaduras (V)

DICA

O farad é uma unidade enorme. Capacitores de circuito eletrônico ficam na faixa dos picofarads (10^{-12} F) e dos microfarads (10^{-6} F); só os eletrolíticos grandes e os bancos industriais chegam a milifarads. Se a sua conta devolver alguns farads, procure um erro de potência de dez.

8.6.1 Capacitor de placas paralelas

DEFINIÇÃO 8.13 • Capacitor de Placas Paralelas

Num capacitor formado por duas placas planas e paralelas, a capacitância cresce com a área das placas e diminui com a separação entre elas. Colocar um dielétrico entre as placas, no lugar do vácuo, multiplica a capacitância pela **permissividade relativa** do material, que vale 1 para o vácuo, cerca de 1 para o ar e valores maiores para todos os isolantes sólidos.

$$C = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, \frac{A}{d} \tag{8.14}$$

C: capacitância do capacitor plano (F)
ε_r: permissividade relativa do dielétrico (1 no vácuo)
ε_0: permissividade do vácuo, $8{,}85 \times 10^{-12}$ (F/m)
A: área de cada armadura (m^2)
d: distância entre as armaduras (m)

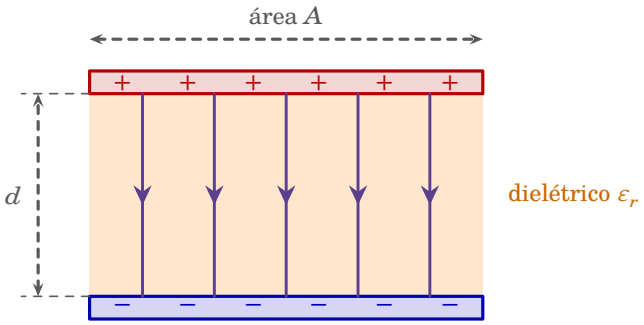


Figura 8.17

8.6.2 Energia armazenada

DEFINIÇÃO 8.14 • Energia Armazenada no Capacitor

A energia guardada no campo elétrico de um capacitor carregado é o trabalho que a fonte realizou para transportar a carga de uma armadura à outra. Ela não vale QU, e sim metade disso, porque a tensão foi crescendo de zero até U enquanto a carga era transferida, e o que conta é a tensão média. As três formas abaixo são a mesma expressão, escritas com pares diferentes de grandezas.

$$E_{pel} = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q U \tag{8.15}$$

E_{pel}: energia armazenada no capacitor (J)
C: capacitância (F)
U: tensão entre as armaduras (V)
Q: carga acumulada (C)

8.6.3 Associação de capacitores

DEFINIÇÃO 8.15 • Associação em Série e em Paralelo

Em **série**, os capacitores são atravessados pela mesma carga e as tensões se somam, de modo que os inversos das capacitâncias é que se somam. A capacitância equivalente resulta *menor* que a menor do conjunto. Em **paralelo**, todos ficam sob a mesma tensão e as cargas se somam, de modo que as capacitâncias se somam diretamente e a equivalente é *maior* que a maior do conjunto. Perceba que as regras são as opostas das dos resistores do cap. 9.

$$\text{série:} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots \tag{8.16}$$

$$\text{paralelo:} \quad C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots \tag{8.17}$$

C_{eq}: capacitância equivalente da associação (F)
C_1, C_2: capacitâncias associadas (F)

DICA

Guarde o que é comum a cada associação, porque é isso que resolve a questão. Em série, a *carga* é a mesma em todos e as tensões se repartem em proporção inversa às capacitâncias. Em paralelo, a *tensão* é a mesma em todos e as cargas se repartem em proporção direta às capacitâncias. Numa associação mista, resolva primeiro o bloco em paralelo e depois trate o resultado como um capacitor único em série com os demais.

EXEMPLO 8.15 • Capacitor de placas paralelas

Um capacitor plano tem armaduras de área $A = 0{,}020\,\text{m}^2$ separadas por $d = 1{,}0\,\text{mm}$, com ar entre elas. Ele é ligado a uma fonte de 12 V. Determine (a) a capacitância, (b) a carga acumulada e (c) a energia armazenada. Adote $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F/m}$ e $\varepsilon_r = 1$ para o ar.

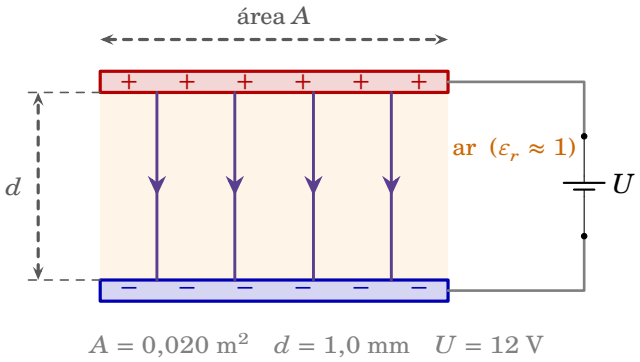


Figura 8.18

1 Compreender

O assunto é o **capacitor de placas paralelas**, com três fórmulas da seção encadeadas: geometria, carga e energia.

Objetivo. Obter a capacitância, a carga acumulada e a energia armazenada a doze volts. O que está em jogo é a ordem: a capacitância não depende da fonte, então ela vem primeiro, e a tensão só entra depois.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.14) e diga o que cada símbolo significa. A carga vem da Equação (8.13) e a energia da Equação (8.15).

2 Organizar

Dados $A = 0{,}020\,\text{m}^2$
$d = 1{,}0\,\text{mm}$
$U = 12\,\text{V}$
$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F/m}$
$\varepsilon_r = 1$.

Conversões $d = 1{,}0\,\text{mm} = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}$.

Estratégia calcule C, use $Q = C\,U$ e feche com $E_{pel} = {}^1\!/_2 C\,U^2$.

3 **Resolver**

(a) Capacitância. Pela geometria:

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon_0 \frac{A}{d} \\ &= 8{,}85 \times 10^{-12} \times \frac{0{,}020}{1{,}0 \times 10^{-3}} \\ &= 8{,}85 \times 10^{-12} \times 20 \end{aligned}$$

$$\boxed{C = 177\,\text{pF}}$$

(b) Carga acumulada. Capacitância vezes tensão:

$$\begin{aligned} Q &= C\,U \\ &= 177 \times 10^{-12} \times 12 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q = 2{,}1\,\text{nC}}$$

(c) Energia armazenada. No campo elétrico:

$$\begin{aligned} E_{pel} &= \frac{1}{2} C\,U^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 177 \times 10^{-12} \times (12)^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 177 \times 10^{-12} \times 144 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{pel} = 12{,}7\,\text{nJ}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência conferindo a energia por outro caminho: $^1/_2 QU = {}^1/_2 \times 2{,}1 \times 10^{-9} \times 12 = 12{,}7 \times 10^{-9}$ J, o mesmo valor, o que confirma que as três formas da Equação (8.15) são equivalentes. Os números também fazem sentido: 177 pF é a capacitância típica de um componente de circuito eletrônico, e a energia guardada é minúscula. O contraste com a escala industrial é o que importa aqui. Bancos de capacitores de correção de fator de potência em refinarias chegam a centenas de microfarads em milhares de volts, guardam energia suficiente para ser letal e continuam carregados depois de desligados, por isso levam resistores de descarga e placas de advertência.

EXEMPLO 8.16 • Associação em série

Um capacitor de $C_1 = 6{,}0\,\mu\text{F}$ e outro de $C_2 = 3{,}0\,\mu\text{F}$ são ligados em série a uma fonte de 18 V. Determine a capacitância equivalente, a carga acumulada e a tensão em cada capacitor.

1 Compreender

O assunto é a **associação em série** de capacitores.

Objetivo. Obter a capacitância equivalente, a carga do conjunto e a tensão em cada capacitor. O que está em jogo é o que a série tem em comum: os dois acumulam a mesma carga, porque estão no mesmo ramo e a carga que sai de uma armadura vai para a seguinte; as tensões é que se repartem.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.16) e diga o que cada símbolo significa. A carga do conjunto sai de $Q = C_{eq}\,U$, Equação (8.13), e é a de cada um.

2 Organizar

Dados $C_1 = 6{,}0\,\mu\text{F}$
$C_2 = 3{,}0\,\mu\text{F}$
$U = 18\,\text{V}$
ligação em série.

Conversões nenhuma: capacitâncias em μF e tensão em volts dão a carga em μC.

Estratégia some os inversos pela Equação (8.16), calcule $Q = C_{eq}\,U$ e aplique $U = Q/C$ a cada capacitor com essa mesma carga.

3 Resolver

Capacitância equivalente. Some os inversos, em microfarads:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \\ &= \frac{3}{6}\end{aligned}$$

$$\boxed{C_{eq} = 2{,}0\,\mu\text{F}}$$

Carga do conjunto. É a carga de cada capacitor:

$$\begin{aligned} Q &= C_{eq}\, U \\ &= 2{,}0 \times 18 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q = 36\,\mu\text{C}}$$

Tensão em cada capacitor. Aplique $U = Q/C$ a cada um, com a mesma carga:

$$U_1 = \frac{36}{6{,}0} = 6{,}0\,\text{V}$$

$$U_2 = \frac{36}{3{,}0} = 12\,\text{V}$$

$$\boxed{U_1 = 6{,}0\,\text{V}} \qquad \boxed{U_2 = 12\,\text{V}}$$

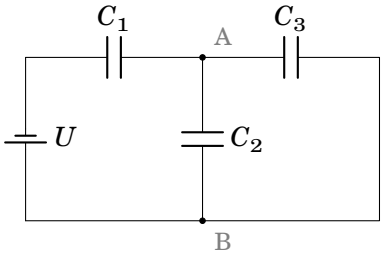
4 Avaliar

Avalie a coerência somando as tensões: $6{,}0 + 12 = 18\,\text{V}$, a tensão da fonte, como a série exige. Confira a equivalente contra a regra: $2{,}0\,\mu\text{F}$ é menor que a menor do conjunto, $3{,}0\,\mu\text{F}$, e isso vale sempre em série. O capacitor de menor capacitância ficou com a maior tensão, na proporção inversa das capacitâncias: numa série, o componente mais fraco é o que corre risco de romper o dielétrico.

Cuidado com a pegadinha: somar os inversos e esquecer de inverter o resultado dá $0{,}5\,\mu\text{F}$; somar as capacitâncias direto, $6 + 3 = 9\,\mu\text{F}$, é a regra do paralelo. Confira sempre se a equivalente ficou menor que a menor.

EXEMPLO 8.17 • Associação mista

Um capacitor $C_1 = 6{,}0\,\mu\text{F}$ está em série com a associação em paralelo de $C_2 = 3{,}0\,\mu\text{F}$ e $C_3 = 3{,}0\,\mu\text{F}$. O conjunto é ligado a uma fonte de 12 V. Determine a capacitância equivalente e a carga e a tensão de cada capacitor.



$C_1 = 6{,}0\ \mu\text{F} \quad C_2 = C_3 = 3{,}0\ \mu\text{F} \quad U = 12\ \text{V}$

Figura 8.19

1 Compreender

O assunto é a **associação mista**, que se resolve de dentro para fora.

Objetivo. Obter a capacitância equivalente e a carga e a tensão de cada um dos três capacitores. O que está em jogo é identificar no desenho quem compartilha os dois nós, que é a marca do paralelo, reduzir esse bloco primeiro e, na volta, distribuir carga e tensão pelas duas regras: mesma carga na série, mesma tensão no paralelo.

Antes de seguir, escreva a Equação (8.17) e diga o que cada símbolo significa. O bloco reduzido entra em série com C_1 pela Equação (8.16).

2 Organizar

Dados $C_1 = 6{,}0\,\mu\text{F}$
$C_2 = C_3 = 3{,}0\,\mu\text{F}$ em paralelo entre si
$U = 12\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: capacitâncias em μF e tensão em volts dão a carga em μC.

Estratégia reduza o paralelo pela Equação (8.17), associe em série com C_1 pela Equação (8.16), obtenha a carga total e volte distribuindo.

3 **Resolver**

Bloco em paralelo. Reduza-o primeiro:

$$\begin{aligned} C_{23} &= C_2 + C_3 \\ &= 3{,}0 + 3{,}0 \\ &= 6{,}0\,\mu\text{F} \end{aligned}$$

Série com C_1. Associe o bloco:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{23}} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{6} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{eq} = 3{,}0\,\mu\text{F}}$$

Carga da série. É a mesma em C_1 e no bloco:

$$\begin{aligned} Q_1 = Q_{23} &= C_{eq}\,U \\ &= 3{,}0 \times 12 \\ &= 36\,\mu\text{C} \end{aligned}$$

Tensões na série. Reparta entre C_1 e o bloco:

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{36}{6{,}0} = 6{,}0\,\text{V}$$

$$U_{23} = 12 - 6{,}0 = 6{,}0\,\text{V}$$

Cargas do paralelo. Como C_2 e C_3 estão em paralelo, os dois ficam sob U_{23}:

$$\begin{aligned} Q_2 = Q_3 &= C_2\,U_{23} \\ &= 3{,}0 \times 6{,}0 \end{aligned}$$

$$\boxed{Q_1 = 36\,\mu\text{C}} \qquad \boxed{U_1 = 6{,}0\,\text{V}}$$

$$\boxed{Q_2 = Q_3 = 18\,\mu\text{C}} \qquad \boxed{U_2 = U_3 = 6{,}0\,\text{V}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência por dois caminhos. Pelas cargas do bloco em paralelo: $18 + 18 = 36\,\mu\text{C}$, a carga que entrou pela série. Pelas tensões

da série: $6{,}0 + 6{,}0 = 12\,\text{V}$, a tensão da fonte. É sempre assim que se valida uma associação mista. A tensão se repartiu igualmente porque C_1 e C_{23} acabaram iguais, coincidência dos números, não regra.

Cuidado com a pegadinha: tratar os três capacitores como todos em série, ou todos em paralelo, é o erro que a banca espera, e por isso ela desenha o circuito. Identifique no desenho quem compartilha os dois nós, a marca do paralelo, antes de escrever qualquer fórmula.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Dois capacitores, cujas capacitâncias são $10\,\mu\text{F}$ e $5\,\mu\text{F}$, estão ligados em paralelo e submetidos a uma diferença de potencial de $10\,\text{V}$.

A capacitância equivalente do sistema, em μF, e a carga acumulada no capacitor de $10\,\mu\text{F}$, em C, valem, respectivamente,

(A) 50 e $1{,}0 \times 10^{-3}$

(B) 15 e $2{,}0 \times 10^{-3}$

(C) 15 e $1{,}0 \times 10^{-4}$

(D) $10/3$ e $1{,}0 \times 10^{-4}$

(E) $10/3$ e $5{,}0 \times 10^{-5}$

2W9B7Q

CAPÍTULO

9

Eletrodinâmica

Observar primeiro os fatos, variar as circunstâncias tanto quanto possível, acompanhar esse primeiro trabalho de medidas precisas, para deduzir dele leis gerais fundadas unicamente na experiência.

ANDRÉ-MARIE AMPÈRE

Primeiro medir, variando as condições, e só depois a lei. Ampère descreveu assim o método com que descobriu a força entre correntes, no livro que deu nome à eletrodinâmica, a *Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos, Deduzida Unicamente da Experiência* (*Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience*), de 1826, cujo título já enuncia o método. Foi assim que Ohm chegou à relação entre tensão e corrente, Joule ao calor dissipado num resistor e Kirchhoff às leis dos circuitos, cada um com um galvanômetro e muitas medidas. É a mesma ordem do método deste livro: os dados vêm antes da fórmula.

A **Eletrodinâmica** estuda a carga elétrica em movimento. O cap. 8 tratou da carga parada e do campo que ela cria em volta de si. Aqui a carga anda, e o capítulo inteiro se organiza em torno de três grandezas que descrevem esse andar: a corrente, que mede quanta carga passa por segundo, a tensão, que é a diferença de potencial do cap. 8 aplicada às pontas de um trecho de circuito, e a resistência, que mede o quanto o material dificulta a passagem. A Lei de Ohm amarra as três numa única igualdade, e todo o resto do capítulo sai dela: a potência dissipada, as associações de resistores, o gerador real e as leis de Kirchhoff, que resolvem o circuito quando série e paralelo

não bastam.

Na indústria de petróleo e gás a eletricidade é o que move a planta. Bombas centrífugas de exportação, compressores de gás, sistemas de controle, iluminação de plataforma e a proteção catódica dos dutos enterrados dependem todos de circuitos dimensionados com as contas deste capítulo. O dimensionamento de um cabo é uma conta de segunda Lei de Ohm somada a uma conta de efeito Joule, porque um condutor subdimensionado aquece, e o consumo mensal de uma unidade de processo é uma conta de potência multiplicada por tempo. A banca cobra exatamente essas contas, quase sempre em circuitos pequenos, com números redondos e uma pegadinha de leitura no enunciado.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Calcular a intensidade da corrente elétrica a partir da carga e do tempo, e obter a carga como área sob o gráfico $i \times t$;
- Aplicar a primeira Lei de Ohm, $U = R\,i$, e reconhecer um condutor ôhmico pelo gráfico $U \times i$;
- Calcular a resistência de um condutor pela segunda Lei de Ohm e prever como ela muda quando o comprimento ou a espessura mudam;
- Calcular a potência dissipada nas três formas equivalentes e a energia consumida em joules e em quilowatt-hora;
- Resolver associações de resistores em série, em paralelo e mistas, e aplicar os divisores de tensão e de corrente;
- Analisar o gerador real e o receptor pelas equações $U = \varepsilon - r\,i$ e $U = \varepsilon' + r'\,i$, com o rendimento de cada um;
- Aplicar as leis de Kirchhoff a circuitos de mais de uma malha e reconhecer a ponte de Wheatstone em equilíbrio.

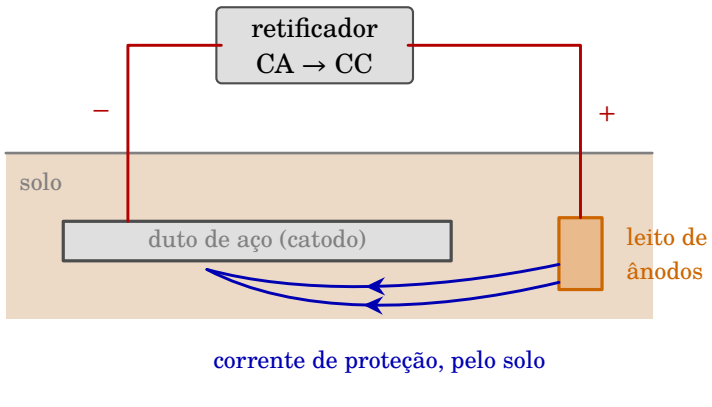


Figura 9.1

9.1 Corrente Elétrica

Num pedaço de metal isolado, os elétrons livres se movem em todas as direções, com velocidades altas e sentidos sorteados a cada colisão. Esse vaivém não transporta carga de um lado para o outro, porque para cada elétron que vai há outro que vem. Ligue as pontas desse metal aos polos de uma bateria e o quadro muda: ao movimento desordenado se soma um escorregamento lento e ordenado, no sentido imposto pelo campo elétrico que a bateria estabelece dentro do fio. É esse escorregamento ordenado que chamamos de corrente.

DEFINIÇÃO 9.1 • Corrente Elétrica

Corrente elétrica é o movimento ordenado de portadores de carga através de um condutor. Sua **intensidade** mede a quantidade de carga que atravessa uma seção transversal do condutor por unidade de tempo.

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{9.1}$$

i: intensidade da corrente elétrica (A = C/s)
ΔQ: carga que atravessa a seção (C)
Δt: intervalo de tempo (s)

A unidade de corrente é o **ampère**, e ela é uma das sete unidades de base do SI, como você viu no cap. 1. Um ampère é um coulomb por segundo. Os valores que aparecem na prática cobrem uma faixa larga: um sensor de campo trabalha com alguns miliampères, uma lâmpada residencial puxa perto de meio ampère, o motor de uma bomba de médio porte pede dezenas de ampères e o motor de partida de um motor a diesel chega a algumas centenas.

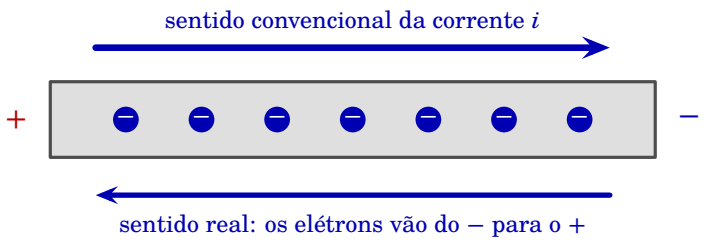


Figura 9.2

O sentido **convencional** da corrente, aquele que a figura marca acima do fio, vai do polo positivo para o negativo, e é oposto ao movimento real dos elétrons no metal. A convenção é anterior à descoberta do elétron e foi mantida porque não muda conta nenhuma: os dois

sentidos descrevem o mesmo transporte de carga. Todos os cálculos e todas as figuras deste livro usam o sentido convencional.

Quem são os portadores depende do meio. Num metal, são os elétrons livres, e só eles se movem, porque os íons positivos estão presos à rede cristalina. Numa solução eletrolítica, como a água salgada que preenche o solo em volta de um duto enterrado, os portadores são íons dos dois sinais, e eles caminham em sentidos opostos. Num gás ionizado, elétrons e íons positivos participam. Em todos os casos a definição da Equação (9.1) vale sem mudança, porque ela conta carga, não conta partículas.

Como a carga é quantizada, a carga que atravessa a seção é sempre um número inteiro de cargas elementares. É a mesma relação do cap. 8, e ela liga a corrente medida no instrumento à contagem de elétrons.

$$\Delta Q = n\,e \tag{9.2}$$

ΔQ: carga que atravessa a seção (C)
n: número de portadores, inteiro
e: carga elementar, $1{,}6 \times 10^{-19}$ (C)

NOTA

Na rede elétrica brasileira usa-se **corrente alternada** a 60 Hz: os portadores oscilam em torno de uma posição, invertendo o sentido 120 vezes por segundo, e o que se propaga é a energia, não os elétrons. Pilhas, baterias e o barramento de corrente contínua dos sistemas de controle fornecem **corrente contínua**, com sentido fixo. Este capítulo trata de corrente contínua.

EXEMPLO 9.1 • Corrente, carga e número de elétrons

Uma corrente contínua de 5,0 A atravessa o cabo de alimentação de um painel durante 2 minutos. Determine (a) a carga elétrica que atravessou uma seção do cabo e (b) o número de elétrons correspondente. Adote $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

1 Compreender

O assunto é a **definição de corrente** e, logo depois, a **quantização da carga** do cap. 8.

Objetivo. Obter a carga que atravessou uma seção do cabo e traduzi-la em número de elétrons. O que está em jogo é a unidade de tempo: a definição de ampère é carga por segundo, e o enunciado deu minutos.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.1) e diga o que cada símbolo significa. A corrente é contínua e constante, o que autoriza aplicá-la direto: se variasse, a carga seria a área sob o gráfico $i \times t$, e não um produto. A segunda parte é uma contagem, não uma medida, porque a carga que passa é sempre um número inteiro de cargas elementares, Equação (9.2).

2 **Organizar**

Dados $i = 5{,}0\,\text{A}$
$\Delta t = 2\,\text{min}$
$e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$.

Conversões $\Delta t = 2 \times 60 = 120\,\text{s}$, porque o ampère é coulomb por segundo.

Estratégia isole ΔQ na Equação (9.1) e divida o resultado pela carga elementar, segundo a Equação (9.2).

3 **Resolver**

(a) Da corrente para a carga. Isole ΔQ na definição e substitua:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= i\,\Delta t \\ &= 5{,}0 \times 120\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta Q = 600\,\text{C}}$$

(b) Da carga para a contagem. Divida pela carga elementar:

$$\begin{aligned}n &= \frac{\Delta Q}{e} \\ &= \frac{600}{1{,}6 \times 10^{-19}} \\ &= 375 \times 10^{19}\end{aligned}$$

$$\boxed{n = 3{,}75 \times 10^{21}\ \text{elétrons}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pela ordem de grandeza. Uma corrente modesta, comparável à de um ferro de passar, moveu em dois minutos um número de elétrons de vinte e dois algarismos. Não é erro de conta: a carga elementar é minúscula, e o mesmo contraste apareceu no cap. 8, quando alguns microcoulombs numa esfera correspondiam a dezenas de trilhões de elétrons. A corrente também não diz nada sobre a velocidade dos elétrons: eles escorregam pelo cobre a fração de milímetro por segundo, e a lâmpada acende no instante em que você liga a chave, porque o campo elétrico se estabelece ao longo do fio quase instantaneamente e põe em movimento os elétrons que já estavam lá.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2012
Um condutor de cobre é percorrido por uma corrente elétrica contínua de intensidade 20 A.
Qual é, aproximadamente, o número de elétrons que atravessa uma seção transversal do condutor em uma hora?

Dado: módulo da carga elétrica do elétron = $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

(A) $6{,}3 \times 10^{18}$
(B) $1{,}3 \times 10^{20}$
(C) $7{,}5 \times 10^{21}$
(D) $2{,}3 \times 10^{22}$
(E) $4{,}5 \times 10^{23}$

K8BD5X

9.1.1 Corrente variável, área do gráfico e valor médio

Quando a corrente não é constante, a Equação (9.1) entrega apenas a **corrente média** do intervalo. Para obter a carga total quando a corrente muda ao longo do tempo, use a mesma leitura geométrica que o cap. 2 já usou no gráfico $v \times t$: a carga é a **área sob o gráfico** $i \times t$. A razão é a mesma nos dois casos. Cada retângulo estreito do gráfico tem altura i e base Δt, e o produto dos dois é a carga daquele pedaço de tempo.

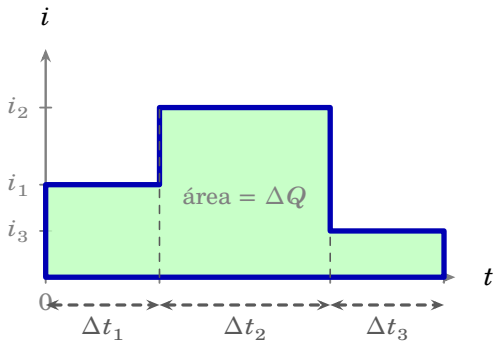


Figura 9.3

EXEMPLO 9.2 • Carga como área do gráfico

Um retificador de proteção catódica opera em três patamares ao longo de uma hora: 4,0 A nos primeiros 15 minutos, 6,0 A nos 30 minutos seguintes e 2,0 A nos 15 minutos finais. Determine (a) a carga total que atravessou o leito de ânodos e (b) a corrente média da hora.

DICA

Gráfico em patamares é o formato preferido da banca, e ele dispensa qualquer conta difícil: a área é uma soma de retângulos. Multiplique a altura de cada degrau pela sua largura e some. Um degrau de altura zero contribui com zero, e não com a largura.

1 Compreender

O assunto é a **carga como área sob o gráfico** $i \times t$, porque a corrente muda de valor.

Objetivo. Obter a carga que passou na hora e a corrente constante que equivaleria aos três patamares. O que está em jogo é ver que os patamares são constantes por trechos, então a área é uma soma de três retângulos, sem aproximação; a corrente média é a que, mantida a hora inteira, transportaria a mesma carga.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.1) e diga o que cada símbolo significa. Aplicada a cada patamar, ela dá a carga do trecho; aplicada à hora inteira, dá a corrente média.

2 Organizar

Dados $i_1 = 4{,}0\,\text{A}$ por $15\,\text{min}$
$i_2 = 6{,}0\,\text{A}$ por $30\,\text{min}$
$i_3 = 2{,}0\,\text{A}$ por $15\,\text{min}$.

Conversões $15\,\text{min} = 900\,\text{s}$
$30\,\text{min} = 1\,800\,\text{s}$
a hora inteira, $3\,600\,\text{s}$.

Estratégia calcule $i\,\Delta t$ de cada patamar e some. Depois divida a carga total pela hora inteira.

3 Resolver

(a) Carga total. Some as três parcelas:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= i_1\Delta t_1 + i_2\Delta t_2 + i_3\Delta t_3\\ &= 4{,}0\times 900 + 6{,}0\times 1\,800 + 2{,}0\times 900\\ &= 3\,600 + 10\,800 + 1\,800\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta Q = 1{,}62\times 10^4\,\text{C}}$$

(b) Corrente média. Divida a carga total pelo tempo total, $\Delta t = 3\,600\,\text{s}$:

$$\begin{aligned}i_m &= \frac{\Delta Q}{\Delta t}\\ &= \frac{16\,200}{3\,600}\end{aligned}$$

$$\boxed{i_m = 4{,}5\,\text{A}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelo intervalo. A corrente média tem de cair entre o menor e o maior patamar, e 4,5 A está entre 2,0 e 6,0. Ela não é a média aritmética dos três valores, que daria 4,0 A: o patamar de 6,0 A durou o dobro dos outros e pesa mais. É esse o erro que a banca explora com patamares de durações diferentes, e a defesa é calcular a área antes de dividir. Num sistema de proteção catódica a corrente é ajustada assim ao longo do dia, acompanhando a resistividade do solo, e a integridade do duto depende da carga total entregue, não do valor instantâneo.

A mesma leitura de área serve para qualquer grandeza que varie no tempo, e não só para a corrente. O **valor médio** de uma grandeza periódica é a área de um ciclo dividida pela duração do ciclo, e ele responde à pergunta "que valor constante produziria o mesmo efeito acumulado". É o número que um instrumento de bobina móvel indica quando se liga a um sinal pulsante, e é o que se lê na tela de um osciloscópio contando quadradinhos.

Numa tela de osciloscópio, cada eixo tem a sua escala, e ela vem escrita no próprio instrumento: a vertical em volts por divisão e a horizontal em segundos por divisão. Para achar o valor médio de um trem de pulsos retangulares, você não precisa da escala de tempo. Basta a altura do pulso, contada em divisões e convertida em volts, e a fração do ciclo em que ele fica no nível alto.

DICA

Num trem de pulsos retangulares que alterna entre um valor U_0 e zero, o valor médio é U_0 multiplicado pela fração do ciclo em nível alto. Se o pulso ocupa dois terços do ciclo, o valor médio é $2U_0/3$. A escala de tempo não entra: ela serve para achar a frequência, que é outra pergunta.

9.2 Resistência Elétrica e as Leis de Ohm

Aplique uma diferença de potencial às pontas de um condutor e uma corrente se estabelece. Quanto vale essa corrente depende do condutor: o mesmo par de pilhas que faz passar meio ampère por um fio de cobre curto faz passar poucos miliampères pelo filamento de uma lâmpada. A grandeza que mede essa dificuldade é a resistência, e a definição dela é a razão entre a tensão aplicada e a corrente obtida.

> DEFINIÇÃO 9.2 • Resistência Elétrica
>
> **Resistência elétrica** de um trecho de circuito é a razão entre a diferença de potencial aplicada às suas pontas e a intensidade da corrente que o atravessa. Ela mede a oposição que o trecho oferece à passagem da corrente, e a unidade é o **ohm**, símbolo Ω.

$$R = \frac{U}{i} \tag{9.3}$$

R: resistência elétrica ($\Omega = \text{V/A}$)
U: diferença de potencial nas pontas (V)
i: corrente que atravessa o trecho (A)

9.2.1 Primeira Lei de Ohm

A Equação (9.3) define a resistência e vale sempre, para qualquer componente. O que ela não garante é que o valor de R seja o mesmo quando a tensão muda. Georg Ohm descobriu que, para uma classe grande de materiais mantidos à temperatura constante, esse valor não muda, e é esse resultado experimental que leva o nome de primeira Lei de Ohm.

DEFINIÇÃO 9.3 • Primeira Lei de Ohm

Um condutor é **ôhmico** quando a sua resistência não depende da tensão aplicada. Nele, a corrente é diretamente proporcional à diferença de potencial, e o gráfico $U \times i$ é uma reta que passa pela origem.

$$U = R\,i \tag{9.4}$$

U: diferença de potencial (V)
R: resistência, constante no condutor ôhmico (Ω)
i: intensidade da corrente (A)

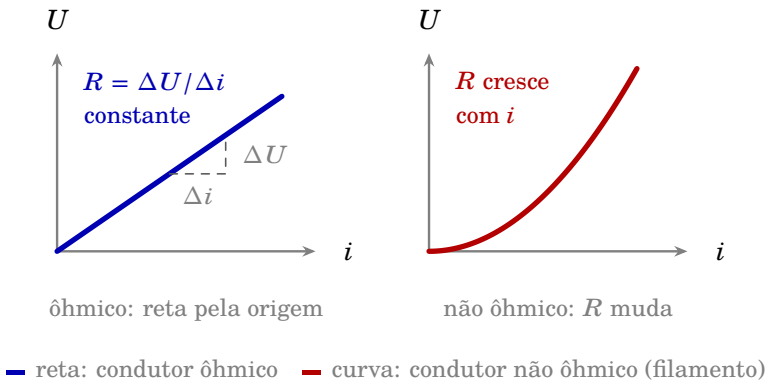


Figura 9.4

No gráfico $U \times i$ a resistência é a inclinação da reta, e ler o valor dela é ler U/i em qualquer ponto. Confira sempre os rótulos dos eixos antes: num gráfico invertido, com i na vertical e U na horizontal, a

CUIDADO

Ôhmico não quer dizer "obedece a $U = R\,i$". Todo componente obedece a $R = U/i$ em cada ponto, porque essa é a definição de resistência. Ôhmico é o componente cujo R **não muda** quando a corrente muda, e o sinal disso é o gráfico $U \times i$ sair reto. O filamento de uma lâmpada incandescente esquenta com a corrente e a sua resistência cresce, então ele não é ôhmico. O diodo também não é.

inclinação passa a ser $1/R$. A banca troca os eixos justamente para separar quem lê o gráfico de quem decorou a figura.

> **EXEMPLO 9.3** • Leitura de uma curva característica
>
> Um resistor foi ensaiado e forneceu os pares (i, U) seguintes: $(0{,}20\,\text{A};\ 5{,}0\,\text{V})$, $(0{,}40\,\text{A};\ 10{,}0\,\text{V})$ e $(0{,}60\,\text{A};\ 15{,}0\,\text{V})$. Determine (a) se ele é ôhmico e (b) a corrente que ele conduzirá sob 18 V.

1 Compreender

O assunto é o **critério de condutor ôhmico**: a resistência não muda com a corrente.

Objetivo. Verificar se os três pares dão a mesma resistência e, se derem, obter a corrente sob 18 V. O que está em jogo é o que autoriza a extrapolação do item (b): se $R = U/i$ se repete nos três pares, a proporcionalidade vale em toda a faixa; se não se repetisse, prever a corrente fora dos pontos medidos seria um chute.

Antes de seguir, releia a Definição 9.3 e diga com suas palavras o que ela afirma. A Equação (9.4) é a sua forma de cálculo.

2 Organizar

Dados três pares de valores medidos, e a tensão de trabalho $U = 18\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: tudo em volts e ampères.

Estratégia calcule U/i nos três pares. Sendo iguais, use a Equação (9.4) com R para achar a corrente pedida.

3 Resolver

(a) Resistência em cada par. Calcule a razão U/i:

$$R_1 = \frac{5{,}0}{0{,}20} = 25\,\Omega$$
$$R_2 = \frac{10{,}0}{0{,}40} = 25\,\Omega$$
$$R_3 = \frac{15{,}0}{0{,}60} = 25\,\Omega$$

Os três valores coincidem, então o componente é ôhmico com $R = 25\,\Omega$.

(b) Corrente sob 18 V. Isole-a na primeira Lei de Ohm:

$$i = \frac{U}{R} = \frac{18}{25}$$

$$i = 0{,}72\,\text{A}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela proporcionalidade. A tensão de 18 V está entre 15 e 20, e a corrente saiu entre 0,60 e 0,80 A, na mesma proporção. Perceba que a conclusão do item (a) é o que sustenta o item (b): num componente não ôhmico os três valores de U/i seriam diferentes e a única saída seria medir de novo, na tensão de trabalho. É esse o motivo de os catálogos de lâmpadas informarem a potência na tensão nominal em vez da resistência do filamento. Na instrumentação de processo o raciocínio aparece na calibração de um transmissor: três pontos alinhados autorizam interpolar, três pontos fora da reta indicam que o instrumento precisa de ajuste.

Entre os componentes não ôhmicos, o **diodo** é o caso extremo e o mais usado. Ele conduz com facilidade num sentido e praticamente não conduz no sentido oposto, de modo que a sua resistência não apenas muda com a corrente: ela muda conforme o *sentido* em que a tensão é aplicada. É por isso que o diodo é o componente que transforma corrente alternada em contínua, no retificador que aparece na figura de abertura deste capítulo. Nenhuma das leis de Ohm se aplica a ele.

9.2.2 Segunda Lei de Ohm: a resistência do condutor

A primeira Lei de Ohm trata a resistência como um dado. A segunda diz de onde esse valor vem: da geometria do condutor e do material de que ele é feito. Um fio comprido resiste mais que um curto, porque o portador percorre um caminho maior e sofre mais colisões. Um fio grosso resiste menos que um fino, porque oferece mais seção para a carga passar. E, entre dois fios de mesma forma, o que for de cobre resiste menos que o de ferro.

> **DEFINIÇÃO 9.4** • Segunda Lei de Ohm
>
> Em um condutor homogêneo de seção transversal constante, a resistência é diretamente proporcional ao comprimento e inversamente proporcional à área da seção. A constante de proporcionalidade é a **resistividade** do material, uma propriedade da substância e da temperatura.

$$R = \rho \frac{L}{A} \tag{9.5}$$

R: resistência do condutor (Ω)
ρ: resistividade do material ($\Omega \cdot$ m)
L: comprimento do condutor (m)
A: área da seção transversal (m^2)

CUIDADO

A é a área da **seção transversal**, o círculo que se vê ao cortar o fio, e não a superfície lateral. Para um fio de diâmetro d, vale $A = \pi d^2/4$. Trocar diâmetro por raio nessa conta divide a área por quatro e é o erro mais comum do assunto.

Material	**Resistividade a 20 °C ($\Omega \cdot$m)**
Prata	$1{,}6 \times 10^{-8}$
Cobre	$1{,}7 \times 10^{-8}$
Alumínio	$2{,}8 \times 10^{-8}$
Ferro	$1{,}0 \times 10^{-7}$
Níquel-cromo	$1{,}1 \times 10^{-6}$

O cobre é o padrão para cabos de força porque reúne resistividade baixa, boa maleabilidade e preço aceitável. O alumínio, que resiste mais, é usado mesmo assim em linhas de transmissão aéreas: para conduzir o mesmo, o cabo de alumínio precisa de mais seção, e ainda assim pesa cerca da metade do equivalente em cobre, o que alivia a estrutura das torres. Já as ligas de níquel-cromo têm resistividade mais de sessenta vezes maior que a do cobre, e é exatamente por isso que servem para as resistências de aquecimento.

NOTA

A resistividade dos metais **cresce** com a temperatura, segundo $\rho = \rho_0 (1 + \alpha \Delta T)$, com $\alpha > 0$. Nos semicondutores ocorre o contrário. O crescimento nos metais é regular o bastante para servir de termômetro, e é esse o princípio do sensor RTD, o elemento de medição de temperatura mais usado nas plantas de processo. Um Pt100 tem $100\ \Omega$ a $0\,^\circ$C e cerca de $138\ \Omega$ a $100\,^\circ$C.

EXEMPLO 9.4 • Queda de tensão em um cabo de alimentação

Uma bomba de recirculação é alimentada por um cabo de cobre ($\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot$ m) de 2,0 mm de diâmetro. A bomba fica a 50 m do painel, de modo que o comprimento total de condutor, entre a ida e a volta, é $L = 100$ m. Determine: (a) a resistência do cabo e (b) a queda de tensão nele quando a bomba puxa 8,0 A, e diga se essa queda respeita o limite de 4% de uma rede de 220 V.

1 Compreender

O assunto é a **segunda Lei de Ohm**, para a resistência, seguida da **primeira**, para a queda de tensão.

Objetivo. Obter a resistência do cabo e a tensão que ele rouba dos 220 V, comparada ao limite de 4%. O que está em jogo é o comprimento: a corrente vai até a bomba e volta, então o condutor que ela percorre mede o dobro da distância entre os equipamentos; o cabo é o caminho até a carga, e a tensão que ele consome não chega à bomba.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.5) e diga o que cada símbolo significa. A área é a da seção transversal, $\pi d^2/4$; a queda vem da

Equação (9.4).

2 Organizar

Dados $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$
$L = 100\,\mathrm{m}$
$d = 2{,}0\,\mathrm{mm}$
$i = 8{,}0\,\mathrm{A}$
limite de 4% de 220 V.

Conversões $d = 2{,}0\,\mathrm{mm} = 2{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}$.

Estratégia calcule a área da seção por $A = \pi d^2/4$, aplique a Equação (9.5) e depois a Equação (9.4). Compare a queda com 4% de 220 V.

3 Resolver

(a) Área da seção. A partir do diâmetro:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi d^2}{4} \\ &= \frac{\pi \times (2{,}0 \times 10^{-3})^2}{4} \\ &= \pi \times 10^{-6}\,\mathrm{m}^2 \end{aligned}$$

Resistência do cabo. Aplique a segunda Lei de Ohm:

$$\begin{aligned} R &= \rho \frac{L}{A} \\ &= 1{,}7 \times 10^{-8} \times \frac{100}{\pi \times 10^{-6}} \\ &= \frac{1{,}7 \times 10^{-6}}{\pi \times 10^{-6}} \end{aligned}$$

$$R \approx 0{,}54\ \Omega$$

(b) Queda de tensão no cabo. Aplique a primeira Lei de Ohm:

$$\begin{aligned} U &= R\,i \\ &= 0{,}54 \times 8{,}0 \end{aligned}$$

$$U \approx 4{,}3\,\mathrm{V}$$

Comparação com o limite. 4% de 220 V são 8,8 V, e 4,3 V ficam abaixo disso.

A queda de 4,3 V corresponde a 2% da tensão nominal e respeita o limite de 4% admitido para o cabo.

4 Avaliar

Avalie a coerência pela ordem de grandeza. Meio ohm para cem metros de fio fino é um valor plausível, e a queda que ele produz é pequena porque a corrente também é. Perceba o que a conta ensina sobre dimensionamento: se a mesma bomba puxasse 20 A, a queda subiria para 11 V e estouraria o limite, e a solução seria aumentar a seção do cabo, porque R cai quando A sobe. Perceba também o efeito da distância, que entra dobrada. Numa plataforma, onde os painéis ficam longe dos consumidores, é comum a bitola do cabo ser definida pela queda de tensão admissível, e não pela corrente que ele suporta sem aquecer.

> **EXEMPLO 9.5** • Como a resistência muda com a geometria
>
> Um fio cilíndrico de resistência R é substituído por outro, do mesmo material, com o dobro do comprimento e o dobro do diâmetro. Determine a resistência do novo fio em função de R.

1 Compreender

O assunto é a **proporcionalidade da segunda Lei de Ohm** em forma literal, sem número nenhum.

Objetivo. Obter a resistência do fio novo em função de R. O que está em jogo é o diâmetro: a área depende dele ao quadrado, e dobrar o diâmetro quadruplica a seção; o material é o mesmo, então ρ sai da comparação.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.5) e diga o que cada símbolo significa. Restam as duas dependências dela: a resistência cresce com o comprimento e cai com a área.

2 Organizar

Dados $L' = 2L$
$d' = 2d$
mesmo material, logo mesma ρ.

Conversões nenhuma: a questão é literal.

Estratégia escreva R e R' pela Equação (9.5) com $A = \pi d^2/4$ e divida uma pela outra, para que ρ e as constantes desapareçam.

3 Resolver

Fio original. Escreva a resistência em termos do diâmetro:

$$R = \rho \frac{L}{\pi d^2/4} = \frac{4\rho L}{\pi d^2}$$

Fio novo. Substitua L por $2L$ e d por $2d$:

$$\begin{aligned} R' &= \frac{4\rho\,(2L)}{\pi\,(2d)^2} \\ &= \frac{8\rho L}{4\pi d^2} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4\rho L}{\pi d^2} \end{aligned}$$

Comparação. Reconheça a fração como o próprio R:

$$R' = \frac{R}{2}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelos dois efeitos separados. Dobrar o comprimento sozinho dobraria a resistência. Dobrar o diâmetro sozinho a dividiria por quatro, e não por dois, porque quem entra na fórmula é a área. Combinados, o resultado é 2/4, ou seja, metade. Cuidado com a pegadinha: a alternativa $R' = R$ aparece sempre nesse tipo de questão e captura quem tratou o diâmetro como se entrasse na primeira potência. O mesmo raciocínio explica por que esticar um fio aumenta muito a sua resistência: ao esticar, o comprimento cresce e a seção diminui na mesma proporção, de modo que dobrar o comprimento por estiramento quadruplica R, em vez de apenas dobrá-lo.

9.3 Potência e Energia Elétrica

Toda a Eletrodinâmica prática se resume, no fim, a uma conta de energia. O cap. 8 mostrou que mover uma carga q entre dois pontos de diferença de potencial U envolve um trabalho $W = q\,U$. Num condutor percorrido por corrente, a carga que atravessa o trecho em um intervalo Δt é $\Delta Q = i\,\Delta t$, e portanto o trabalho realizado nesse intervalo é $W = (i\,\Delta t)\,U$. Divida os dois lados por Δt e você tem a potência.

9.3.1 Potência elétrica

DEFINIÇÃO 9.5 • Potência Elétrica

Potência elétrica de um trecho de circuito é a energia que ele consome ou fornece por unidade de tempo. Ela é o produto da diferença de potencial entre as pontas do trecho pela corrente que o atravessa, e a unidade é o watt.

$$P = U\,i \tag{9.6}$$

P: potência elétrica (W = J/s)
U: diferença de potencial no trecho (V)
i: corrente que atravessa o trecho (A)

Num resistor, a primeira Lei de Ohm relaciona U e i, o que permite escrever a mesma potência de outras duas maneiras. Substitua $U = R\,i$ na Equação (9.6) e obtenha a primeira delas. Substitua $i = U/R$ e obtenha a segunda.

$$P = R\,i^2 \tag{9.7}$$

$$P = \frac{U^2}{R} \tag{9.8}$$

P: potência dissipada no resistor (W)
R: resistência (Ω)
i: corrente no resistor (A)
U: tensão no resistor (V)

EXEMPLO 9.6 • Resistência de aquecimento em regime

Uma resistência de aquecimento de 10 Ω é ligada a 220 V e permanece assim durante 15 minutos. Determine (a) a corrente, (b) a potência dissipada e (c) a energia consumida, em quilowatt-hora.

1 COMPREENDER

O assunto é a **potência elétrica** nas suas três formas e a energia na unidade da conta de luz.

Objetivo. Obter a corrente, a potência dissipada e a energia consumida em quinze minutos, em quilowatt-hora. O que está em jogo é a quem pertence a tensão: a resistência está ligada direto à alimentação, então os 220 V são de fato a tensão sobre ela, e as três expressões

CUIDADO

As três expressões dão o mesmo número apenas quando U, R e i são os do **mesmo** componente e se correspondem pela Lei de Ohm. Num circuito com vários resistores, usar a tensão da fonte com a resistência de um resistor isolado é o erro clássico: a tensão da fonte não é a tensão daquele resistor. Confira sempre a quem pertence cada valor antes de substituir.

de potência valem indiferentemente; a unidade pedida no item (c) obriga a trabalhar com quilowatt e hora.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.6) e diga o que cada símbolo significa. A corrente vem da Equação (9.4) e a energia é potência vezes tempo.

2 Organizar

Dados $R = 10\,\Omega$
$U = 220\,\text{V}$
$\Delta t = 15\,\text{min}.$

Conversões $\Delta t = 15\,\text{min} = 0{,}25\,\text{h}.$

Estratégia aplique a Equação (9.4) para a corrente, a Equação (9.6) para a potência e multiplique a potência em quilowatts pelo tempo em horas.

3 Resolver

(a) Corrente. Isole-a na primeira Lei de Ohm:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U}{R} \\ &= \frac{220}{10} \end{aligned}$$

$$\boxed{i = 22\,\text{A}}$$

(b) Potência. Multiplique tensão por corrente:

$$\begin{aligned} P &= U\,i \\ &= 220 \times 22 \end{aligned}$$

$$\boxed{P = 4\,840\,\text{W} = 4{,}84\,\text{kW}}$$

(c) Energia. Multiplique a potência em quilowatts pelo tempo em horas:

$$\begin{aligned} E_{el} &= P\,\Delta t \\ &= 4{,}84 \times 0{,}25 \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{el} = 1{,}21\,\text{kWh}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência conferindo a potência por outro caminho. Por $P = U^2/R$ sai $220^2/10 = 48\,400/10 = 4\,840\,\text{W}$, o mesmo valor, o

que confirma a corrente do item (a). A ordem de grandeza também fecha: quase cinco quilowatts é a potência de um chuveiro elétrico grande, e uma resistência de 10 Ω em 220 V é mesmo um elemento de aquecimento de potência alta. Perceba que a energia saiu pequena em quilowatt-hora porque o tempo foi curto, e que o mesmo número em joules seria $4{,}36 \times 10^6$, um valor de leitura desconfortável. É por isso que a conta de luz não usa joule.

EXEMPLO 9.7 • Equipamento ligado fora da tensão nominal

Uma lâmpada trazia a inscrição "100 W — 220 V" e foi ligada por engano a 110 V. Supondo a resistência do filamento constante, determine a potência que ela passa a dissipar.

DICA

Escolha a forma da potência pelo dado que você tem. Com a corrente conhecida, use $P = R\,i^2$. Com a tensão conhecida, use $P = U^2/R$. Escolher bem elimina um passo de cálculo e, com ele, um passo onde se erra.

1 Compreender

O assunto é a leitura dos **valores nominais** de um equipamento.

Objetivo. Obter a potência que a lâmpada dissipa com metade da tensão nominal. O que está em jogo é o que viaja com o componente: os 100 W são a potência dissipada quando a lâmpada recebe os 220 V para os quais foi projetada, e a propriedade dela é a resistência, calculada primeiro a partir do par nominal.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.8) e diga o que cada símbolo significa. Ela entra duas vezes: com o par nominal, para achar R, e com a tensão real, para achar a potência.

2 Organizar

Dados $P_{nom} = 100\,\text{W}$ sob $U_{nom} = 220\,\text{V}$
tensão de operação $U = 110\,\text{V}$
R constante.

Conversões nenhuma: watts e volts dão ohms direto.

Estratégia obtenha R pelos valores nominais e aplique $P = U^2/R$ com a tensão real.

3 Resolver

Resistência do filamento. Pelos valores nominais:

$$R = \frac{U_{nom}^2}{P_{nom}} = \frac{220^2}{100} = 484\,\Omega$$

Potência na tensão real. Aplique a mesma expressão com a tensão

de operação:

$$P = \frac{U^2}{R} = \frac{110^2}{484} = \frac{12\,100}{484}$$

$$P = 25\,\text{W}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pela dependência quadrática. Com R fixo, a potência varia com o quadrado da tensão, então metade da tensão dá um quarto da potência. É isso que o resultado mostra, porque 25 é a quarta parte de 100. Cuidado com a pegadinha: a alternativa 50 W está sempre entre as opções e captura quem raciocinou que metade da tensão dá metade da potência. Perceba ainda que a hipótese de resistência constante é uma idealização generosa. O filamento alimentado com 110 V esquenta menos, e um filamento mais frio resiste menos, de modo que a potência real fica um pouco acima dos 25 W calculados. A conclusão prática não muda: a lâmpada acende fraca, com luz alaranjada.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2012
Um chuveiro elétrico dissipa 968 W quando submetido a 220 V. Qual seria, aproximadamente, a intensidade da corrente elétrica que passaria por esse chuveiro se sobre ele fosse aplicada uma tensão de 180 V?

(A) 0,50 A
(B) 1,8 A
(C) 2,2 A
(D) 3,6 A
(E) 7,8 A

Z5QFK9

9.3.2 Efeito Joule

Num resistor, toda a energia elétrica consumida vira energia térmica. Os portadores ganham energia do campo entre uma colisão e outra e a entregam à rede cristalina ao colidir, o que aumenta a agitação dos íons e, portanto, a temperatura do material. A conversão é integral e não tem volta: nenhum arranjo de circuito recupera como energia elétrica o calor que já saiu do resistor.

DEFINIÇÃO 9.6 • Efeito Joule

Efeito Joule é a conversão irreversível de energia elétrica em energia térmica na passagem da corrente por um resistor. A energia dissipada é o produto da potência pelo tempo de funcionamento.

$$E_{diss} = R\, i^2\, \Delta t \tag{9.9}$$

E_{diss}: energia dissipada em forma de calor (J)
R: resistência (Ω)
i: corrente (A)
Δt: tempo de funcionamento (s)

O efeito Joule é a finalidade do equipamento em uns casos e o problema a combater em outros. Ele é a finalidade no chuveiro, no forno de resistência e no traçador elétrico que mantém aquecida a linha de óleo pesado para que a viscosidade não suba demais. Ele é o problema no cabo de força, no enrolamento do motor e no contato mal apertado de um borne, onde a resistência local é alta e a energia dissipada aparece como ponto quente.

EXEMPLO 9.8 • Traçador elétrico aquecendo óleo parado

Um traçador elétrico de 500 W envolve um trecho de linha que contém 12 kg de óleo, de calor específico $c = 2\,000$ J/(kg $\cdot^\circ$ C). Supondo que toda a energia dissipada seja recebida pelo óleo, determine o tempo necessário para elevar sua temperatura de 20 °C para 50 °C.

1 COMPREENDER

O assunto é o **efeito Joule** deste capítulo ligado à **calorimetria** do cap. 6.

Objetivo. Obter o tempo que o traçador precisa ficar ligado para aquecer o óleo em trinta graus. O que está em jogo é a hipótese "toda a energia é recebida pelo óleo", uma idealização declarada que dispensa tratar as perdas para o ambiente: a energia que o traçador dissipa a taxa constante chega inteira ao óleo como calor.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.7) e diga o que cada símbolo significa. Ela dá o calor de que o óleo precisa; o tempo é o que a potência leva para entregá-lo, pela Equação (9.9) escrita como $E_{diss} = P\,\Delta t$.

CUIDADO

Nesta subseção a letra Q aparece com o significado que ela tem no cap. 6, o de **calor**, e não o de carga elétrica que ela tem no cap. 8 e no restante deste capítulo. É a única passagem do livro em que os dois sentidos se encontram, e ela existe porque a energia dissipada pelo efeito Joule é justamente o calor recebido por quem está sendo aquecido. Neste capítulo, a carga aparece sempre escrita como ΔQ.

2 **Organizar**

Dados $P = 500\,\text{W}$
$m = 12\,\text{kg}$
$c = 2\,000\,\text{J/(kg}\cdot^\circ\text{C)}$
$\Delta T = 50 - 20 = 30\,^\circ\text{C}$.

Conversões nenhuma: massa em kg e calor específico em J/(kg·°C) dão joules, e watt é joule por segundo.

Estratégia calcule o calor necessário pela calorimetria do cap. 6, iguale-o à energia elétrica dissipada, $E_{diss} = P\,\Delta t$, e isole o tempo.

3 **Resolver**

Calor necessário. O que o óleo precisa receber:

$$\begin{aligned} Q &= m\,c\,\Delta T \\ &= 12 \times 2\,000 \times 30 \\ &= 7{,}2 \times 10^5\,\text{J} \end{aligned}$$

Tempo de aquecimento. Iguale esse calor à energia dissipada pelo traçador e isole o tempo:

$$\begin{aligned} P\,\Delta t &= Q \\ \Delta t &= \frac{Q}{P} \\ &= \frac{7{,}2 \times 10^5}{500} = 1\,440\,\text{s} \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta t = 1\,440\,\text{s} = 24\,\text{min}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pela ordem de grandeza. Meio quilowatt entregando setecentos mil joules leva mesmo alguns milhares de segundos, e vinte e quatro minutos para aquecer doze quilos de óleo em trinta graus é um tempo razoável para um sistema de traçagem. Perceba a hipótese que sustenta a conta: na linha real parte do calor escapa pelo isolamento, e o tempo é maior. É por isso que o traçador de campo trabalha em regime permanente, apenas repondo o que se perde para o ambiente, em vez de aquecer o produto do zero. Perceba também a ponte entre os dois capítulos: nada aqui é novo, a única novidade é a origem elétrica do calor.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011
Um circuito elétrico é alimentado por uma bateria de 12 V e possui uma resistência elétrica de 6,0 Ω. Supondo que toda a energia dissipada no resistor seja utilizada, quanto tempo será necessário para elevar de 20 °C para 80 °C a temperatura de 100 g de água?

Dado: calor específico da água $c = 4{,}0\,\text{J/(g}\cdot^\circ\text{C)}$.

(A) 60 min
(B) 30 min
(C) 20 min e 10 s
(D) 18 min
(E) 16 min e 40 s

MJKX3Q

9.3.3 Energia elétrica e o quilowatt-hora

A unidade de energia do SI é o joule, mas ela é pequena demais para medir consumo. Uma lâmpada de 100 W acesa por um dia consome mais de oito milhões de joules. Por isso o setor elétrico mede energia em **quilowatt-hora**, que é a energia consumida por um aparelho de um quilowatt funcionando durante uma hora.

$$E_{el} = P\,\Delta t \qquad \text{com} \qquad 1\,\text{kWh} = 3{,}6\times10^{6}\,\text{J} \tag{9.10}$$

E_{el}: energia elétrica consumida (kWhouJ)
P: potência do aparelho (kWouW)
Δt: tempo de funcionamento (hous)

DICA

Trabalhe com as unidades combinadas: potência em quilowatts e tempo em horas dão energia direto em quilowatt-hora, sem conversão nenhuma. Só passe para joules se o enunciado pedir. O fator $3{,}6\times10^{6}$ vem de $1\,000\,\text{W}\times3\,600\,\text{s}$, e não precisa ser decorado.

EXEMPLO 9.9 • Consumo mensal de um conjunto de bombas

Uma estação de bombeamento tem três bombas iguais, de 15 kW cada, que funcionam 16 horas por dia, e um sistema de iluminação de 2,0 kW que fica ligado 24 horas por dia. Determine (a) o consumo mensal, em quilowatt-hora, considerando o mês de 30 dias, e (b) o custo, a R$ 0,60 por quilowatt-hora.

1 COMPREENDER

O assunto é a **energia como potência multiplicada por tempo**, com cargas de regimes de funcionamento diferentes.

Objetivo. Obter a energia que a estação consome no mês e quanto

isso custa. O que está em jogo é tratar cada grupo em separado: as bombas trabalham dezesseis horas por dia e a iluminação, vinte e quatro, e somar as potências para multiplicar por um tempo único daria errado.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.10) e diga o que cada símbolo significa. Com a potência em quilowatts e o tempo em horas, ela entrega quilowatt-hora direto.

2 Organizar

Dados três bombas de 15 kW por 16 h/dia
iluminação de 2,0 kW por 24 h/dia
30 dias
tarifa de R$ 0,60 por kWh.

Conversões nenhuma: potência em kW e tempo em horas dão kWh direto.

Estratégia calcule a energia de cada grupo pela Equação (9.10), some as duas parcelas e multiplique o total pela tarifa.

3 Resolver

(a) Energia das bombas. No mês:

$$\begin{aligned} E_{bombas} &= 3 \times 15 \times 16 \times 30 \\ &= 21\,600\ \text{kWh} \end{aligned}$$

Energia da iluminação. No mês:

$$\begin{aligned} E_{luz} &= 2{,}0 \times 24 \times 30 \\ &= 1\,440\ \text{kWh} \end{aligned}$$

Consumo total. Some as parcelas:

$$E_{el} = 23\,040\ \text{kWh}$$

(b) Custo. Multiplique pelo preço do quilowatt-hora:

$$\text{custo} = 23\,040 \times 0{,}60 = \text{R\$ } 13\,824{,}00$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo peso de cada parcela. As bombas respondem por mais de 90% do consumo, o que era de esperar, já que somam 45 kW contra 2 kW da iluminação, e ainda operam a maior parte do

dia. Perceba onde uma economia faria diferença: apagar a iluminação pela metade do tempo pouparia 720 kWh no mês, enquanto reduzir em uma hora diária a operação das bombas pouparia 1 350 kWh. É por essa razão que os programas de eficiência energética industrial começam sempre pelos motores, e não pela iluminação.

9.3.4 Corrente alternada e valor eficaz

Tudo o que este capítulo calculou até aqui vale para corrente contínua, em que a tensão é constante. A rede elétrica, porém, é alternada: a tensão varia senoidalmente, sobe até um valor máximo num sentido, volta a zero, vai ao máximo no sentido oposto e recomeça, sessenta vezes por segundo. Com a tensão mudando o tempo todo, a potência instantânea também muda, e a pergunta que interessa passa a ser outra: qual é a *potência média* entregue ao resistor?

A resposta se organiza em torno de um único número. Compare a instalação alternada com uma instalação de corrente contínua que aqueça o mesmo resistor com a mesma potência média. A tensão contínua dessa instalação equivalente é o que se chama de valor eficaz da tensão alternada.

DEFINIÇÃO 9.7 • Valor Eficaz

Valor eficaz de uma tensão ou de uma corrente alternada é o valor contínuo que produziria, no mesmo resistor, a mesma potência média. Para uma grandeza senoidal, ele vale o valor de pico dividido por raiz de dois.

$$U_{ef} = \frac{U_{máx}}{\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad i_{ef} = \frac{i_{máx}}{\sqrt{2}} \tag{9.11}$$

U_{ef}: valor eficaz da tensão (V)
$U_{máx}$: valor de pico da tensão (V)
i_{ef}: valor eficaz da corrente (A)
$i_{máx}$: valor de pico da corrente (A)

Com os valores eficazes, **as três expressões de potência da Seção 9.3.1 continuam valendo sem mudança nenhuma**, e essa é a razão de o valor eficaz existir. A potência média de um resistor em corrente alternada é $P = U_{ef}\, i_{ef}$, ou $R\, i_{ef}^2$, ou U_{ef}^2/R.

CUIDADO

Quando se diz que a tomada é de 220 V, esse é o valor **eficaz**. O pico chega a $220\sqrt{2} \approx 311$ V, e é o pico que determina a isolação exigida do equipamento. Um multímetro comum, ligado em corrente alternada, indica o valor eficaz, não o de pico. Trocar um pelo outro erra a potência por um fator dois.

EXEMPLO 9.10 • Resistência de aquecimento em corrente alternada

Um forno de resistência de 24,2 Ω é alimentado por uma tensão alternada senoidal cujo valor de pico é 311 V. Determine (a) o valor eficaz da tensão e (b) a potência média dissipada pela resistência.

1 Compreender

O assunto é o **valor eficaz** e o motivo de ele existir.

Objetivo. Obter a tensão contínua que equivale aos 311 V de pico e a potência média que ela entrega ao forno. O que está em jogo é não usar o pico na fórmula da potência: a tensão só passa por ele duas vezes em cada ciclo, e o que entra na conta de potência média é o valor eficaz.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.11) e diga o que cada símbolo significa. Depois dela, a conta é a da Seção 9.3.1, Equação (9.8), sem nada de novo.

2 Organizar

Dados $U_{máx} = 311\,\text{V}$
$R = 24{,}2\,\Omega$
$\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Conversões nenhuma: volts e ohms dão watts.

Estratégia divida o pico por $\sqrt{2}$ e aplique a Equação (9.8) com o valor eficaz.

3 Resolver

(a) Valor eficaz. Divida o pico por raiz de dois:

$$U_{ef} = \frac{U_{máx}}{\sqrt{2}} = \frac{311}{1{,}41}$$

$$\boxed{U_{ef} = 220\,\text{V}}$$

(b) Potência média. Aplique-a com o valor eficaz:

$$P = \frac{U_{ef}^2}{R} = \frac{220^2}{24{,}2} = \frac{48\,400}{24{,}2}$$

$$P = 2\,000\,\text{W} = 2{,}0\,\text{kW}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo reconhecimento do resultado. O valor eficaz saiu 220 V, que é exatamente a tensão da tomada, e não por acaso: a rede brasileira de 220 V tem pico de 311 V. Perceba o erro que o valor de pico produziria: usando 311 V na fórmula da potência sairiam 4 000 W, o dobro do valor certo. O fator é dois porque a potência depende do quadrado da tensão, e o quadrado de $\sqrt{2}$ é dois. Perceba ainda que nada disso muda as fórmulas do capítulo: o valor eficaz existe justamente para que a análise de corrente contínua continue valendo em corrente alternada.

9.4 Associação de Resistores

Circuito real não tem um resistor só. A ideia que organiza a análise é a de **resistência equivalente**: dado um conjunto de resistores entre dois pontos, a resistência equivalente é o valor do resistor único que, colocado no lugar do conjunto, faria a fonte fornecer exatamente a mesma corrente. Trocar o conjunto pelo equivalente não altera nada fora dele, e é isso que permite resolver um circuito grande reduzindo-o por partes.

Daqui em diante os circuitos são desenhados com os símbolos da Figura 9.5, os mesmos das provas da banca: o retângulo é o resistor, a seta cruzada marca o resistor variável, o par de traços desiguais é o gerador, e os instrumentos de medida, que a Seção 9.7 explica, aparecem como um círculo com a letra A ou V.

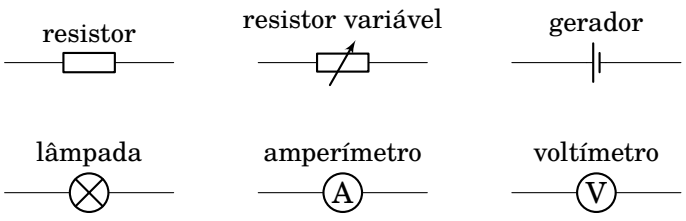


Figura 9.5

9.4.1 Associação em série

Dois resistores estão **em série** quando há um único caminho para a corrente passar de um ao outro, sem nenhuma derivação entre eles. A consequência imediata é que a corrente é a mesma nos dois, porque a carga que entra em um precisa sair para entrar no seguinte.

DEFINIÇÃO 9.8 • Resistência Equivalente em Série

Numa associação em série, a corrente é a mesma em todos os resistores e as diferenças de potencial se somam. A resistência equivalente é a soma das resistências.

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots \tag{9.12}$$

R_{eq}: resistência equivalente da associação (Ω)
$R_1, R_2, \ldots$: resistências associadas em série (Ω)

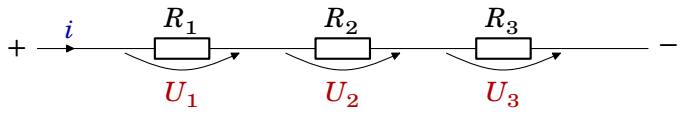


Figura 9.6

Como a corrente é comum, a tensão em cada resistor é proporcional à sua resistência. Escreva $U_k = R_k\, i$ para o resistor k e $U = R_{eq}\, i$ para o conjunto, divida uma pela outra e a corrente desaparece. O resultado é o **divisor de tensão**, que é a forma mais rápida de achar a tensão em um resistor de uma série sem calcular a corrente.

$$U_k = U\,\frac{R_k}{R_{eq}} \tag{9.13}$$

U_k: tensão no resistor R_k (V)
U: tensão sobre a associação inteira (V)
R_k: resistência do resistor considerado (Ω)
R_{eq}: resistência equivalente da série (Ω)

EXEMPLO 9.11 • Série e divisor de tensão

Três resistores, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ e $R_3 = 30\,\Omega$, são ligados em série a uma fonte de 24 V de resistência interna desprezível. Determine (a) a corrente do circuito e (b) a tensão em cada resistor.

DICA

Em série, a resistência equivalente é sempre **maior** que a maior do conjunto, e a maior tensão cai sobre o maior resistor. Use as duas afirmações para avaliar a coerência do resultado antes de escolher a alternativa.

1 Compreender

O assunto é a **associação em série** e o **divisor de tensão**.

Objetivo. Obter a corrente do circuito e a tensão em cada um dos três resistores. O que está em jogo é o que a série tem em comum: há um caminho só, então os três são percorridos pela mesma corrente; e a fonte, de resistência interna desprezível, entrega os 24 V inteiros à

associação.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.12) e diga o que cada símbolo significa. A corrente vem da Equação (9.4) aplicada ao conjunto.

2 **Organizar**

Dados $R_1 = 10\,\Omega$
$R_2 = 20\,\Omega$
$R_3 = 30\,\Omega$
$U = 24\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: ohms e volts dão ampères.

Estratégia some as resistências pela Equação (9.12), obtenha a corrente pela Equação (9.4) e multiplique a corrente por cada resistência.

3 **Resolver**

(a) Resistência equivalente. Some as três:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_2 + R_3 \\ &= 10 + 20 + 30 = 60\,\Omega \end{aligned}$$

Corrente. Pela Lei de Ohm no conjunto:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U}{R_{eq}} \\ &= \frac{24}{60} \end{aligned}$$

$$\boxed{i = 0{,}40\,\text{A}}$$

(b) Tensão em cada resistor. Multiplique a corrente comum por cada resistência:

$$\begin{aligned} U_1 &= 10 \times 0{,}40 = 4{,}0\,\text{V} \\ U_2 &= 20 \times 0{,}40 = 8{,}0\,\text{V} \\ U_3 &= 30 \times 0{,}40 = 12{,}0\,\text{V} \end{aligned}$$

$$\boxed{U_1 = 4{,}0\,\text{V}} \qquad \boxed{U_2 = 8{,}0\,\text{V}} \qquad \boxed{U_3 = 12{,}0\,\text{V}}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pela soma. As três tensões somam $4+8+12 = 24\,\text{V}$, exatamente a tensão da fonte, como a lei das malhas exige. Perceba a proporcionalidade: as resistências estão entre si como $1:2:3$ e

as tensões saíram na mesma proporção, o que é o divisor de tensão da Equação (9.13) em ação. Um atalho útil aparece daí: o resistor de 30 Ω é metade da resistência total, então ele fica com metade da tensão, sem conta nenhuma. É esse arranjo que se usa para obter uma tensão intermediária a partir de uma fonte fixa, como nos circuitos de condicionamento de sinal de instrumentação.

9.4.2 Associação em paralelo

Dois resistores estão **em paralelo** quando ambos ligam o mesmo par de pontos do circuito. A consequência imediata é que a diferença de potencial é a mesma nos dois, porque as pontas são as mesmas, e a corrente se reparte entre os caminhos disponíveis.

DEFINIÇÃO 9.9 • Resistência Equivalente em Paralelo

Numa associação em paralelo, a diferença de potencial é a mesma em todos os resistores e as correntes se somam. O inverso da resistência equivalente é a soma dos inversos das resistências.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots \tag{9.14}$$

R_{eq}: resistência equivalente da associação (Ω)
$R_1, R_2, \ldots$: resistências associadas em paralelo (Ω)

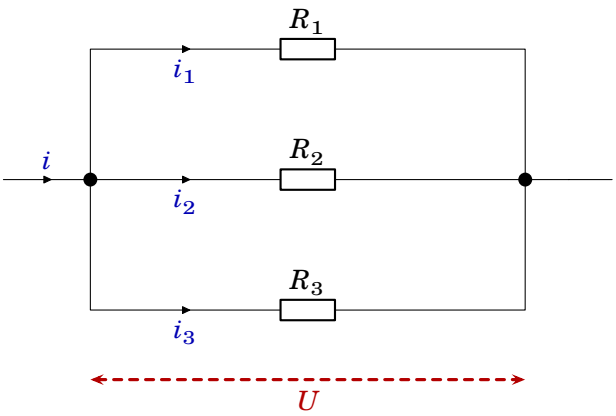


Figura 9.7

Dois casos particulares resolvem quase todas as questões de prova e vale a pena guardá-los. Para **dois** resistores em paralelo, a Equação (9.14) se reduz ao produto sobre a soma. Para n resistores **iguais**, a equivalente é a resistência de um deles dividida por n.

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{9.15}$$

$$R_{eq} = \frac{R}{n} \qquad (n \text{ resistores iguais}) \tag{9.16}$$

R_{eq}: resistência equivalente (Ω)
R_1, R_2: as duas resistências em paralelo (Ω)
R: valor comum dos n resistores iguais (Ω)
n: número de resistores iguais

Como a tensão é comum, a corrente em cada ramo é inversamente proporcional à sua resistência. Escreva $i_k = U/R_k$ para o ramo k e $i = U/R_{eq}$ para o conjunto, divida uma pela outra e a tensão desaparece. O resultado é o **divisor de corrente**.

$$i_k = i\,\frac{R_{eq}}{R_k} \tag{9.17}$$

i_k: corrente no ramo de resistência R_k (A)
i: corrente total que chega à associação (A)
R_{eq}: resistência equivalente do paralelo (Ω)
R_k: resistência do ramo considerado (Ω)

CUIDADO

A Equação (9.15) vale para **dois** resistores, e só. Com três, aplicar o produto sobre a soma aos três valores dá resultado errado. Nesse caso, ou se usa a soma dos inversos, ou se associam dois de cada vez. E lembre que a Equação (9.14) entrega $1/R_{eq}$, não R_{eq}: esquecer de inverter no final é o erro mais frequente do assunto.

EXEMPLO 9.12 • Paralelo e divisor de corrente

Dois resistores, $R_1 = 6{,}0\,\Omega$ e $R_2 = 12\,\Omega$, são ligados em paralelo a uma fonte de 24 V. Determine (a) a resistência equivalente e (b) a corrente em cada ramo e a corrente total.

DICA

Em paralelo, a resistência equivalente é sempre **menor** que a menor do conjunto, e a maior corrente passa pelo menor resistor. Ligar mais um aparelho em paralelo, numa instalação, sempre *aumenta* a corrente total, porque abre mais um caminho.

1 Compreender

O assunto é a **associação em paralelo**.

Objetivo. Obter a resistência equivalente, a corrente em cada ramo e a corrente total. O que está em jogo é o que o paralelo tem em comum: os dois resistores ligam o mesmo par de pontos, então ambos ficam sob os 24 V da fonte, e cada um puxa a corrente que a própria resistência permite.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.15) e diga o que cada símbolo significa. Como são dois resistores, ela resolve a equivalente em um passo.

2 Organizar

Dados $R_1 = 6{,}0\,\Omega$
$R_2 = 12\,\Omega$
$U = 24\,\text{V}$, comum aos dois.

Conversões nenhuma: ohms e volts dão ampères.

Estratégia use o produto sobre a soma para a equivalente e aplique a Lei de Ohm a cada ramo com a tensão comum. Confira somando as correntes.

3 Resolver

(a) Resistência equivalente. Produto sobre a soma:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6{,}0 \times 12}{6{,}0 + 12} = \frac{72}{18}$$

$$\boxed{R_{eq} = 4{,}0\,\Omega}$$

(b) Corrente em cada ramo. Lei de Ohm com a tensão comum:

$$i_1 = \frac{24}{6{,}0} = 4{,}0\,\text{A}$$

$$i_2 = \frac{24}{12} = 2{,}0\,\text{A}$$

$$\boxed{i_1 = 4{,}0\,\text{A}} \qquad \boxed{i_2 = 2{,}0\,\text{A}} \qquad \boxed{i = 6{,}0\,\text{A}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência por dois caminhos. Primeiro, a equivalente de $4{,}0\,\Omega$ é menor que a menor das duas resistências, como tem de ser em paralelo. Segundo, a corrente total pela equivalente vale $24/4{,}0 = 6{,}0\,\text{A}$, que é exatamente a soma dos dois ramos, e essa coincidência é a lei dos nós antecipada. Perceba a proporção: R_2 é o dobro de R_1 e conduz metade da corrente, o que é o divisor de corrente da Equação (9.17). É esse comportamento que explica por que uma instalação residencial é toda ligada em paralelo: cada aparelho recebe a tensão da rede e puxa a corrente de que precisa, sem depender dos outros.

9.4.3 Associação mista

A maioria dos circuitos de prova combina os dois arranjos. Não há fórmula nova: o que existe é um procedimento de redução, sempre do trecho mais interno para o mais externo, e depois um caminho de volta para achar as tensões e correntes de cada componente.

ESTRATÉGIA

Para resolver uma associação mista:

1. Identifique os trechos que são claramente série ou claramente paralelo, começando pelos mais internos;
2. Substitua cada trecho pela sua resistência equivalente e redesenhe o circuito, agora mais simples;
3. Repita até sobrar um resistor único, e obtenha a corrente total pela Lei de Ohm;
4. Volte passo a passo, aplicando o divisor de tensão nos trechos em série e o divisor de corrente nos trechos em paralelo, até chegar ao componente que a questão pede.

EXEMPLO 9.13 • Associação mista

No circuito da figura, $R_1 = 6\,\Omega$ está em série com o paralelo de $R_2 = R_3 = 8\,\Omega$, seguido de $R_4 = 2\,\Omega$, tudo ligado a 24 V. Determine a resistência equivalente e a corrente total.

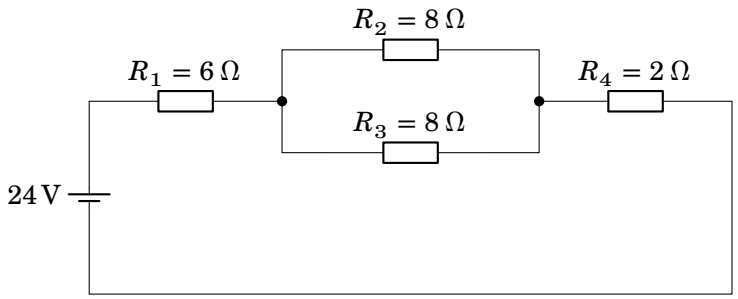


Figura 9.8

1 Compreender

O assunto é a **redução de uma associação mista**, de dentro para fora.

Objetivo. Obter o resistor único que substituiria o conjunto e a corrente que a fonte entrega a ele. O que está em jogo é a ordem da redução: o trecho mais interno é o paralelo de R_2 e R_3, iguais, e, feita essa substituição, o circuito vira uma série de três resistores.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.16) e diga o que cada símbolo significa. A série que sobra fecha pela Equação (9.12).

2 Organizar

Dados $R_1 = 6\,\Omega$
$R_2 = R_3 = 8\,\Omega$ em paralelo
$R_4 = 2\,\Omega$
$U = 24\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: ohms e volts dão ampères.

Estratégia reduza primeiro o paralelo interno, some as três resistências que sobram e aplique a Lei de Ohm.

3 Resolver

Paralelo interno. Dois resistores iguais:

$$R_{23} = \frac{8}{2} = 4\,\Omega$$

Série que sobra. Some as três resistências:

$$\begin{aligned} R_{eq} &= R_1 + R_{23} + R_4 \\ &= 6 + 4 + 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{R_{eq} = 12\,\Omega}$$

Corrente total. Lei de Ohm no circuito reduzido:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U}{R_{eq}} \\ &= \frac{24}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{i = 2{,}0\,\text{A}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo balanço de potências. A fonte entrega $P = Ui = 24 \times 2 = 48\,\text{W}$, e a soma do que cada trecho dissipa é $6 \times 2^2 + 4 \times 2^2 + 2 \times 2^2 = 24 + 16 + 8 = 48\,\text{W}$. Os dois números coincidem, o que confirma a redução. Perceba que os 2,0 A atravessam R_1 e R_4 inteiros, mas se dividem em 1,0 A para cada um dos ramos de $8\,\Omega$, porque são iguais. Cuidado com a pegadinha: quem soma os quatro resistores como se fossem uma série só obtém $24\,\Omega$ e uma corrente de 1,0 A, e essa alternativa costuma estar na prova.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

Observe um determinado trecho de um circuito elétrico, em que há quatro resistores idênticos de resistência igual a 4,0 Ω cada um. Três deles estão ligados em série e esse conjunto, em paralelo com o quarto.

Qual o valor, em Ω, da resistência equivalente dessa associação de resistores?

(A) 3,0
(B) 4,0
(C) 6,0
(D) 12,0
(E) 16,0

G9KJSY

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2011

Três lâmpadas idênticas são ligadas de dois modos diferentes a uma mesma fonte de tensão V. No primeiro modo, todas são ligadas em série. No segundo, as três estão em paralelo. Qual a razão entre a potência emitida pelas lâmpadas no primeiro modo (P_1) e no segundo modo (P_2)?

(A) $P_1 = \frac{P_2}{3}$
(B) $P_1 = \frac{P_2}{9}$
(C) $P_1 = P_2$
(D) $P_1 = 3P_2$
(E) $P_1 = 9P_2$

MS6JQB

9.4.4 Curto-circuito e o brilho das lâmpadas

Um **curto-circuito** é um caminho de resistência praticamente nula ligando dois pontos do circuito. O efeito sobre o que estava entre esses dois pontos é drástico e vale entender de uma vez, porque a banca cobra sempre em forma de pergunta sobre brilho de lâmpada.

Como o fio de curto e o componente que ele contorna ficam em paralelo, os dois passam a ter a mesma tensão. Mas a tensão no fio é $U = Ri$ com $R \approx 0$, ou seja, praticamente zero. Logo a tensão no componente contornado também é zero, e por ele não passa corrente: ele fica **desligado**, e uma lâmpada nessa posição apaga. Toda a corrente que chega desvia pelo curto.

CUIDADO

Curto-circuitar um componente não o queima. Quem corre risco são os *outros* componentes do circuito, que passam a receber mais tensão do que antes, e a fonte, que passa a fornecer mais corrente. Numa prova, a pergunta "o que acontece com as lâmpadas quando a chave fecha" quase sempre tem a resposta "as contornadas apagam e as demais brilham mais".

EXEMPLO 9.14 • Duas lâmpadas iguais, em série e em paralelo

Duas lâmpadas idênticas, de resistência R cada uma, são ligadas a uma mesma fonte de tensão U. Compare a potência dissipada por *cada* lâmpada nos dois arranjos: primeiro as duas em série, depois as duas em paralelo.

1 Compreender

O assunto é o **efeito da associação sobre a potência**, em forma literal: o que se pede é a razão entre dois casos.

Objetivo. Obter quantas vezes cada lâmpada dissipa mais em paralelo do que em série. O que está em jogo é a tensão de cada lâmpada, que é o que muda de um arranjo para o outro: em série as duas repartem a tensão da fonte, e cada uma fica com $U/2$; em paralelo cada uma recebe U inteira.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.8) e diga o que cada símbolo significa. Ela é a forma mais direta, porque a resistência de cada lâmpada é a mesma nos dois arranjos.

2 Organizar

Dados duas lâmpadas de resistência R
tensão da fonte U
os dois arranjos possíveis.

Conversões nenhuma: a questão é literal.

Estratégia determine a tensão sobre uma lâmpada em cada arranjo e aplique a Equação (9.8) duas vezes.

3 Resolver

Potência em série. As duas lâmpadas iguais repartem a tensão da fonte:

$$P_s = \frac{(U/2)^2}{R} = \frac{U^2}{4R}$$

Potência em paralelo. Cada lâmpada recebe a tensão inteira:

$$P_p = \frac{U^2}{R}$$

Razão. Divida uma pela outra:

$$P_s = \frac{P_p}{4}$$

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelo sentido físico. Em série cada lâmpada recebe metade da tensão, e como a potência depende do quadrado da tensão, a queda é para um quarto, não para a metade. É por isso que duas lâmpadas em série brilham muito menos do que as mesmas duas em paralelo, e não apenas um pouco menos. Perceba que a conclusão vale para *cada* lâmpada e também para o conjunto: em série o par dissipa $U^2/2R$ e em paralelo $2U^2/R$, novamente uma razão de quatro. Cuidado com a pegadinha: a banca costuma perguntar pela potência de cada uma em um caso e pela do conjunto em outro, e quem não lê com atenção mistura os dois.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — BR Distribuidora, Operação, 2010

Sobre um sistema de aquecimento de água composto de duas resistências com 2 kW e 4 kW, ligadas individualmente a chaves elétricas a uma tensão de 380 V, considere as afirmativas a seguir.

I – O sistema de controle possui malha fechada para a variável temperatura.
II – Controlando as chaves elétricas, podem ser escolhidos 4 diferentes regimes de operação.
III – A potência máxima de aquecimento é de 2 280 000 Watts.

Está correto o que se afirma em

(A) I, apenas.
(B) II, apenas.
(C) I e II, apenas.
(D) II e III, apenas.
(E) I, II e III.

FQ9684

9.5 Geradores e Receptores

Até aqui as fontes foram tratadas como ideais, entregando a mesma tensão qualquer que fosse a corrente pedida. Fonte real não faz isso. Uma bateria de automóvel marca 12 V nos terminais com o motor desligado e cai para menos de 10 V no instante da partida, quando o motor de arranque puxa centenas de ampères. A explicação está dentro da própria fonte, e é o assunto desta seção.

9.5.1 Gerador real

Um **gerador** converte alguma outra forma de energia em energia elétrica: química na bateria, mecânica no alternador, luminosa no painel fotovoltaico. A energia que ele entrega por unidade de carga chama-se **força eletromotriz**, ou fem, e se representa por ε. O nome é histórico e enganoso, porque a fem não é uma força: mede-se em volts, e é uma tensão.

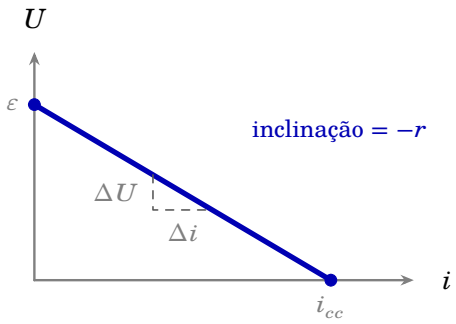
O que impede a fem de chegar inteira aos terminais é a **resistência interna** do gerador, a resistência dos próprios eletrólitos ou enrolamentos por onde a corrente precisa passar antes de sair. Ela dissipa parte da energia dentro do gerador, e o que sobra é a tensão que os terminais oferecem ao circuito externo.

DEFINIÇÃO 9.10 • Equação do Gerador

A tensão nos terminais de um gerador real é a sua força eletromotriz menos a queda de tensão na resistência interna. Ela é sempre menor que a fem, e a diferença cresce com a corrente fornecida.

$$U = \varepsilon - r\,i \tag{9.18}$$

U: tensão nos terminais do gerador (V)
ε: força eletromotriz do gerador (V)
r: resistência interna (Ω)
i: corrente fornecida (A)



reta do gerador: $U = \varepsilon - r\,i$

Figura 9.9

A Equação (9.18) é a equação de uma reta decrescente, e os dois pontos em que ela cruza os eixos têm nome. Em **circuito aberto** não há corrente, e a tensão nos terminais é a própria fem, o que dá o método usual de medir ε: basta um voltímetro e nenhuma carga. Em **curto-circuito** a tensão nos terminais é nula, e a corrente atinge o maior valor que o gerador pode dar.

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r} \tag{9.19}$$

i_{cc}: corrente de curto-circuito (A)
ε: força eletromotriz (V)
r: resistência interna (Ω)

O balanço de energia do gerador tem três parcelas e vale a pena escrevê-lo, porque a banca cobra o rendimento com frequência. A potência **total** é a que o gerador converte, $P_t = \varepsilon\, i$. A potência **dissipada** internamente é $P_d = r\, i^2$. A diferença entre as duas é a potência **útil**, aquela que sai pelos terminais.

$$P_u = U\, i = \varepsilon\, i - r\, i^2 \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{P_u}{P_t} = \frac{U}{\varepsilon} \tag{9.20}$$

P_u: potência útil, entregue ao circuito externo (W)
P_t: potência total gerada, $\varepsilon\, i$ (W)
η: rendimento do gerador
U: tensão nos terminais (V)

CUIDADO

A corrente de curto-circuito é um valor de cálculo, não um regime de operação. Numa bateria de 12 V com $r = 0{,}02\ \Omega$ ela chega a 600 A, e toda essa potência é dissipada dentro da bateria, que aquece, libera gás e pode explodir. É por isso que os terminais de bancos de baterias em sala elétrica são cobertos e que ferramentas metálicas não entram nessa área sem isolamento.

EXEMPLO 9.15 • Bateria durante a partida de um motor

Uma bateria tem $\varepsilon = 12\,\text{V}$ e $r = 0{,}05\ \Omega$. Ao acionar o motor de partida, ela fornece 200 A. Determine (a) a tensão nos terminais, (b) a potência dissipada dentro da bateria e (c) o rendimento nessa condição.

1 **Compreender**

O assunto é a **equação do gerador** em regime de corrente alta, onde a resistência interna deixa de ser detalhe.

Objetivo. Obter a tensão que sobra para o motor de partida, a potência que fica dentro da bateria e o rendimento. O que está em jogo é distinguir fem de tensão nos terminais: os 12 V da bateria são a fem, e a diferença entre as duas é a queda $r\,i$, que com 200 A em cinco centésimos de ohm não será pequena.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.18) e diga o que cada símbolo significa. A dissipação vem da Equação (9.7) com a resistência interna, e o rendimento da Equação (9.20).

2 **Organizar**

Dados $\varepsilon = 12\,\text{V}$
$r = 0{,}05\,\Omega$
$i = 200\,\text{A}$.

Conversões nenhuma: tudo no SI.

Estratégia aplique a Equação (9.18) para a tensão, a Equação (9.7) com a resistência interna para a dissipação e a Equação (9.20) para o rendimento.

3 **Resolver**

(a) Tensão nos terminais. Queda interna subtraída da fem:

$$\begin{aligned} U &= \varepsilon - r\,i \\ &= 12 - 0{,}05 \times 200 \\ &= 12 - 10 \end{aligned}$$

$$\boxed{U = 2{,}0\,\text{V}}$$

(b) Potência dissipada dentro da bateria. Na resistência interna:

$$\begin{aligned} P_d &= r\,i^2 \\ &= 0{,}05 \times 200^2 = 0{,}05 \times 40\,000 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_d = 2\,000\,\text{W}}$$

(c) Rendimento. Tensão nos terminais dividida pela fem:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{U}{\varepsilon} \\ &= \frac{2}{12} \end{aligned}$$

$$\eta \approx 0{,}167 = 16{,}7\%$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo balanço. A potência total é $\varepsilon i = 12 \times 200 = 2\,400\,\text{W}$, dos quais 2 000 W ficam dentro da bateria e 400 W chegam ao motor, o que confirma o rendimento de um sexto. Perceba que a situação é anormal de propósito: uma bateria em bom estado tem resistência interna de poucos centésimos de ohm, mas 200 A é uma corrente enorme, e é a corrente que faz a queda interna explodir. É exatamente esse o quadro de uma partida difícil, com os faróis enfraquecendo e a bateria esquentando. Cuidado com a pegadinha: quem calcula o rendimento como r dividido por alguma coisa erra, porque o rendimento do gerador é a razão entre tensões, e não entre resistências.

EXEMPLO 9.16 • Determinar a fem e a resistência interna por dois pontos

Um gerador foi ensaiado com duas cargas diferentes. Fornecendo 2,0 A, o voltímetro em seus terminais marcou 10,0 V. Fornecendo 6,0 A, marcou 8,0 V. Determine a força eletromotriz e a resistência interna desse gerador.

1 Compreender

O assunto é a **equação do gerador** na direção inversa da usual: em vez de dar ε e r para achar U, o enunciado dá dois pares (i, U) e pede as duas características do gerador.

Objetivo. Obter a força eletromotriz e a resistência interna a partir das duas medidas. O que está em jogo é ver que a equação do gerador é uma reta, e dois pontos a determinam por completo: cada par medido fornece uma equação, e as duas formam um sistema de duas incógnitas.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.18) e diga o que cada símbolo significa. O coeficiente linear dela é ε e a inclinação é $-r$.

2 Organizar

Dados $U_1 = 10{,}0\,\text{V}$ quando $i_1 = 2{,}0\,\text{A}$
$U_2 = 8{,}0\,\text{V}$ quando $i_2 = 6{,}0\,\text{A}$.

Conversões nenhuma: volts e ampères dão ohms.

Estratégia escreva a Equação (9.18) para cada par e subtraia uma da outra, o que elimina ε e deixa r sozinho. Depois volte a qualquer uma das equações para achar ε.

3 Resolver

Uma equação por medida. Escreva a equação do gerador:

$$\begin{aligned} 10{,}0 &= \varepsilon - 2{,}0\,r \\ 8{,}0 &= \varepsilon - 6{,}0\,r \end{aligned}$$

Resistência interna. Subtraia a segunda da primeira, o que elimina a fem:

$$\begin{aligned} 10{,}0 - 8{,}0 &= (6{,}0 - 2{,}0)\,r \\ 2{,}0 &= 4{,}0\,r \end{aligned}$$

$$r = 0{,}50\ \Omega$$

Força eletromotriz. Substitua na primeira equação:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 10{,}0 + 2{,}0 \times 0{,}50 \\ &= 10{,}0 + 1{,}0 \end{aligned}$$

$$\varepsilon = 11{,}0\ \text{V}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelas duas leituras. A fem tem de ser maior que qualquer tensão medida nos terminais, e 11,0 V supera os 10,0 e os 8,0. Perceba o significado geométrico: a resistência interna é o módulo da inclinação da reta $U \times i$, e a fem é o ponto onde ela corta o eixo vertical, o valor que o voltímetro marcaria sem carga. É por isso que a banca pode apresentar a mesma questão só com o gráfico, e a resposta sai da leitura dos dois interceptos. Confira a corrente de curto-circuito: $i_{cc} = 11{,}0/0{,}50 = 22\,\text{A}$, compatível com a reta pelos dois pontos.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014
Um gerador, cuja força eletromotriz é 12,0 V, possui resistência interna de 2,00 Ω. A ele é conectado um resistor de carga de 13,0 Ω.
Qual é, aproximadamente, em W, a potência calorífica dissipada no interior do gerador?

(A) 1,28
(B) 1,60
(C) 1,85
(D) 8,32
(E) 9,60

SRNSCC

9.5.2 Receptor

Um **receptor** é o oposto do gerador: recebe energia elétrica e a converte em outra forma que não seja apenas calor. O motor a transforma em energia mecânica, e o eletrolisador, em energia química. A parcela convertida por unidade de carga chama-se **força contra-eletromotriz**, ou fcem, escrita ε', e o nome vem de ela se opor à corrente, exatamente como a fem do gerador a impulsiona.

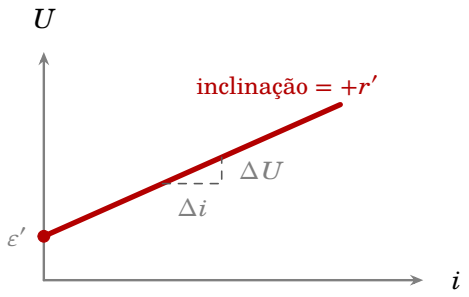
Um receptor também tem resistência interna r', que dissipa calor nos seus enrolamentos. Agora, porém, a tensão que ele exige da fonte é a soma das duas parcelas: a que ele converte em trabalho e a que ele desperdiça aquecendo.

DEFINIÇÃO 9.11 • Equação do Receptor

A tensão aplicada a um receptor é a sua força contra-eletromotriz mais a queda de tensão na resistência interna. Ela é sempre maior que a fcem, e cresce com a corrente.

$$U = \varepsilon' + r' i \tag{9.21}$$

U: tensão aplicada ao receptor (V)
ε': força contra-eletromotriz (V)
r': resistência interna do receptor (Ω)
i: corrente que o atravessa (A)



reta do receptor: $U = \varepsilon' + r'\,i$

Figura 9.10

$$\eta = \frac{\varepsilon'}{U} \tag{9.22}$$

η: rendimento do receptor
ε': força contra-eletromotriz, a parcela aproveitada (V)
U: tensão total aplicada (V)

DICA

O sinal separa os dois casos, e não há mais o que decorar. No gerador a resistência interna *tira* tensão, e a reta $U \times i$ desce. No receptor ela *exige* tensão a mais, e a reta sobe. O rendimento segue a mesma lógica: no gerador é a razão U/ε, sempre com o menor valor em cima, e no receptor é ε'/U, também com o menor em cima.

EXEMPLO 9.17 • Motor elétrico como receptor

Um motor de corrente contínua tem fcem $\varepsilon' = 100\,\text{V}$ e resistência interna $r' = 2{,}0\,\Omega$. Ele é alimentado por uma fonte de 120 V. Determine (a) a corrente de operação, (b) o rendimento e (c) a potência que se perde no aquecimento dos enrolamentos.

1 Compreender

O assunto é a **equação do receptor**.

Objetivo. Obter a corrente de operação, o rendimento e a potência perdida nos enrolamentos. O que está em jogo é como a tensão se reparte: dos 120 V que a fonte impõe, 100 V o motor converte em movimento, e a sobra de 20 V, gasta na resistência dos enrolamentos, é o que determina a corrente.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.21) e diga o que cada símbolo significa. O rendimento vem da Equação (9.22) e a perda de $P_d = r'\,i^2$.

2 Organizar

Dados $\varepsilon' = 100\,\text{V}$
$r' = 2{,}0\,\Omega$
$U = 120\,\text{V}$.

Conversões nenhuma: tudo no SI.

Estratégia isole a corrente na Equação (9.21), aplique a Equação (9.22) e use $P_d = r'\,i^2$.

3 **Resolver**

(a) Corrente. Isole-a na equação do receptor:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U - \varepsilon'}{r'} \\ &= \frac{120 - 100}{2{,}0} = \frac{20}{2{,}0} \end{aligned}$$

$$\boxed{i = 10\,\text{A}}$$

(b) Rendimento. Razão entre a fcem e a tensão aplicada:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\varepsilon'}{U} \\ &= \frac{100}{120} \end{aligned}$$

$$\boxed{\eta \approx 0{,}833 = 83{,}3\%}$$

(c) Potência perdida. Nos enrolamentos:

$$\begin{aligned} P_d &= r'\,i^2 \\ &= 2{,}0 \times 10^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_d = 200\,\text{W}}$$

4 **Avaliar**

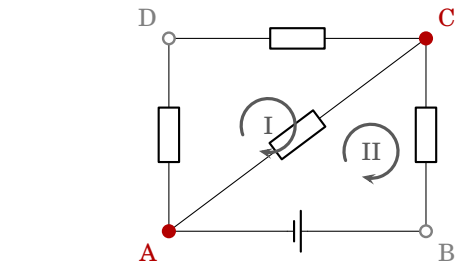
Avalie a coerência pelo balanço de potências. A fonte entrega $U\,i = 120 \times 10 = 1\,200\,\text{W}$, dos quais $\varepsilon'\,i = 100 \times 10 = 1\,000\,\text{W}$ viram energia mecânica e 200 W aquecem o motor, o que reproduz os 83,3% do item (b). Perceba o que acontece quando a carga mecânica do motor aumenta: a fcem cai, a diferença $U - \varepsilon'$ cresce, e a corrente sobe junto. É por isso que um motor travado queima. Com o eixo parado a fcem vai a zero, a corrente passa a valer $U/r' = 60\,\text{A}$, seis vezes a de operação, e os enrolamentos não suportam. É esse o motivo da existência dos relés de sobrecarga em toda partida de motor de bomba na indústria.

9.6 Leis de Kirchhoff

Nem todo circuito se reduz por série e paralelo. Basta haver duas fontes em ramos diferentes, ou um resistor ligando o meio de um ramo ao meio de outro, para que a redução trave: não existe par de resistores que compartilhe os dois terminais nem par que esteja no mesmo caminho único. Para esses casos valem as duas leis de Kirchhoff, que não são leis novas da Física. A primeira é a conservação da carga, e a segunda é a conservação da energia, ambas escritas na linguagem dos circuitos.

DEFINIÇÃO 9.12 • Terminologia de Circuitos

Nó é um ponto onde se encontram três ou mais condutores. **Ramo** é o trecho de circuito entre dois nós consecutivos, percorrido por uma única corrente. **Malha** é qualquer percurso fechado que se possa traçar sobre o circuito, partindo de um ponto e voltando a ele sem repetir trecho.



A, C: nós — B, D: não são nós — I, II: malhas

Figura 9.11

9.6.1 Lei dos nós

DEFINIÇÃO 9.13 • Primeira Lei de Kirchhoff

Em qualquer nó de um circuito, a soma das correntes que chegam é igual à soma das correntes que saem. É a conservação da carga elétrica: carga não se acumula num ponto do fio.

$$\sum i_{\text{entra}} = \sum i_{\text{sai}} \tag{9.23}$$

i_{entra}: correntes que chegam ao nó (A)
i_{sai}: correntes que deixam o nó (A)

CUIDADO

Um ponto em que apenas dois condutores se encontram não é nó, é apenas um ponto do fio. Contar esses pontos como nós leva a escrever equações repetidas e a achar que o sistema é insolúvel. Confira sempre: três ou mais ramos chegando, é nó; dois, não é.

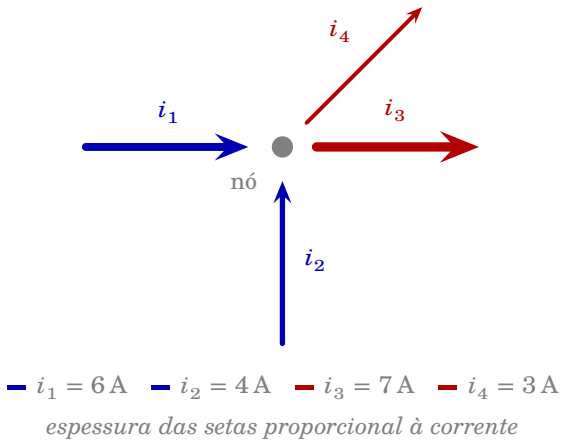


Figura 9.12

EXEMPLO 9.18 • Lei dos nós num barramento

Num barramento de distribuição chegam duas alimentações, de 18 A e 7 A. Dele partem três circuitos: dois medidos, com 12 A e 9 A, e um terceiro sem instrumento. Determine a corrente do terceiro circuito.

1 Compreender

O assunto é a **lei dos nós**.

Objetivo. Obter a corrente do terceiro circuito, o que não tem instrumento. O que está em jogo é ver o barramento como um nó, ainda que grande: carga não se acumula nele, e tudo o que entra tem de sair; as duas alimentações somam a entrada, os três circuitos somam a saída, e a incógnita é uma parcela da saída.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.23) e diga o que cada símbolo significa. Ela vale com resistores, motores ou capacitores no caminho.

2 Organizar

Dados entram 18 A e 7 A
saem 12 A, 9 A e i_3, desconhecida.

Conversões nenhuma: tudo em ampères.

Estratégia some as entradas, some as saídas conhecidas e aplique a Equação (9.23), isolando i_3.

3 Resolver

Lei dos nós. Iguale a soma das entradas à das saídas:

$$18 + 7 = 12 + 9 + i_3$$
$$25 = 21 + i_3$$

$$i_3 = 4{,}0\,\text{A}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo tamanho. A corrente que faltava tinha de ser positiva e menor que o total de entrada, e 4,0 A cumpre as duas condições. Perceba a utilidade prática: essa é a conta que se faz para conferir um barramento com um alicate amperímetro, e uma diferença que não fecha indica ou um circuito não contabilizado, ou uma fuga para a terra. Perceba também que a lei não pergunta o que há em cada ramo. Ela vale com resistores, motores ou capacitores no caminho, porque só afirma que a carga não se acumula no ponto de junção.

9.6.2 Lei das malhas

DEFINIÇÃO 9.14 • Segunda Lei de Kirchhoff

Percorrendo qualquer malha fechada de um circuito e voltando ao ponto de partida, a soma algébrica das variações de potencial é nula. É a conservação da energia: a carga que dá a volta completa retorna ao mesmo potencial de onde saiu.

$$\sum_k U_k = 0 \tag{9.24}$$

U_k: variação de potencial em cada elemento da malha (V)

O que dá trabalho na lei das malhas não é a soma, é o sinal de cada parcela. Escolha um sentido de percurso e mantenha-o na malha inteira. Ao atravessar um resistor **a favor** da corrente, o potencial cai, e a parcela entra com $-R\,i$. Contra a corrente, o potencial sobe, e a parcela entra com $+R\,i$. Ao atravessar um gerador **do polo negativo para o positivo**, o potencial sobe, e a parcela entra com $+\varepsilon$. Do positivo para o negativo, entra com $-\varepsilon$.

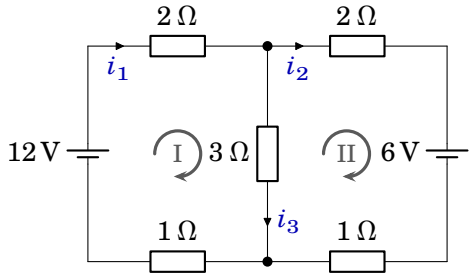
ESTRATÉGIA

Para resolver um circuito pelas leis de Kirchhoff:

1. Identifique os nós e arbitre um sentido para a corrente de cada ramo, sem se preocupar em acertar: o sinal do resultado corrige quem errou;
2. Escreva a lei dos nós para os nós independentes, que são todos menos um;
3. Escolha malhas independentes, uma por ramo que ainda não tenha equação, e escreva a lei das malhas para cada uma, percorrendo sempre no mesmo sentido;
4. Resolva o sistema. Uma corrente que sair negativa existe e tem esse módulo, mas circula no sentido oposto ao que você arbitrou.

EXEMPLO 9.19 • Circuito com dois geradores

Determine as correntes i_1, i_2 e i_3 nos três ramos do circuito da figura, em que dois geradores, de 12 V e 6 V, se opõem.



— I, II: malhas, percorridas no sentido horário

Figura 9.13

1 Compreender

O assunto são as **duas leis de Kirchhoff**, aplicadas juntas.

Objetivo. Obter como a corrente se reparte entre os três ramos quando os dois geradores se opõem. O que está em jogo é ver por que a redução da Seção 9.4.3 não se aplica: com dois geradores em ramos diferentes, nenhum par de resistores está em série ou em paralelo, e três correntes desconhecidas pedem três equações independentes, uma dos nós e duas das malhas.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.24) e diga o que cada símbolo significa. O sinal de cada parcela vem do sentido de percurso; a lei dos nós é a Equação (9.23).

2 Organizar

Dados geradores de 12 V e 6 V, em oposição
resistores de 2 Ω e 1 Ω em cada lado e 3 Ω no ramo central.

Conversões nenhuma: volts e ohms dão ampères.

Estratégia escreva a lei dos nós no nó superior e a lei das malhas nas duas malhas, ambas percorridas no sentido horário. Resolva o sistema de três equações.

3 Resolver

Lei dos nós. No nó superior central:

$$i_1 = i_2 + i_3 \tag{1}$$

Malha da esquerda. Percorra-a no sentido horário, subindo pelo gerador de 12 V:

$$\begin{aligned} 12 - 2i_1 - 3i_3 - 1i_1 &= 0 \\ i_1 + i_3 &= 4 \end{aligned} \tag{2}$$

Malha da direita. Percorra-a no mesmo sentido, descendo pelo gerador de 6 V:

$$\begin{aligned} 3i_3 - 2i_2 - 6 - 1i_2 &= 0 \\ i_3 - i_2 &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

Sistema. Substitua (1) em (2) e use (3) para eliminar i_2:

$$\begin{aligned} (i_2 + i_3) + i_3 &= 4 \\ (i_3 - 2) + 2i_3 &= 4 \\ 3i_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\boxed{i_1 = 2{,}0\,\text{A}} \qquad \boxed{i_2 = 0} \qquad \boxed{i_3 = 2{,}0\,\text{A}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência conferindo a malha que não foi usada para achar o resultado, a externa, que passa pelos dois geradores e pelos quatro resistores laterais: $12 - 3 \times 2{,}0 - 3 \times 0 - 6 = 0$, o que fecha. Perceba o significado de $i_2 = 0$: o ramo da direita existe, está fechado e não conduz, porque a queda de 6 V no resistor central é exatamente igual à fem do segundo gerador. Cuidado com a pegadinha: corrente nula não é circuito aberto; se qualquer valor mudasse, o ramo voltaria a

conduzir. A corrente de 2,0 A atravessa o gerador de 12 V e o resistor central, e o gerador de 6 V está apenas presente, sem entregar nem receber energia.

9.6.3 Ponte de Wheatstone

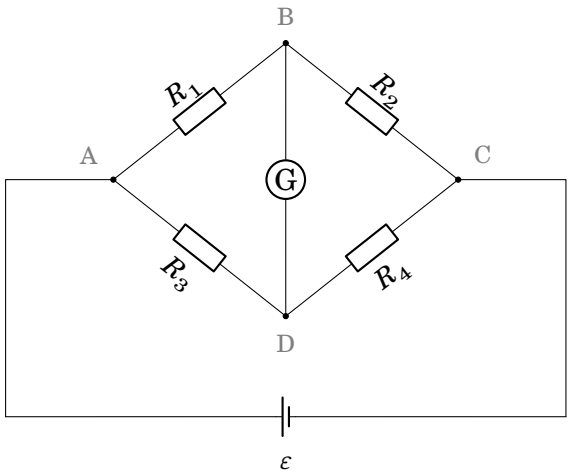
A **ponte de Wheatstone** é um arranjo de quatro resistores em losango, com um detector no braço central e uma fonte alimentando a diagonal oposta. Ela é usada para medir resistência com precisão, e é a base de quase toda a instrumentação de processo que converte uma grandeza física em sinal elétrico.

DEFINIÇÃO 9.15 • Condição de Equilíbrio da Ponte

A ponte está **em equilíbrio** quando o detector do braço central não acusa corrente. Nessa condição os dois pontos do braço central estão no mesmo potencial, e os produtos das resistências dos ramos opostos são iguais.

$$R_1 R_4 = R_2 R_3 \tag{9.25}$$

R_1, R_4: resistências de um par de ramos opostos (Ω)
R_2, R_3: resistências do outro par de ramos opostos (Ω)



ponte em equilíbrio: o galvanômetro G não acusa corrente

Figura 9.14

A condição da Equação (9.25) admite duas leituras equivalentes, e convém guardar a que for mais fácil de aplicar à figura que a prova apresentar. Ou o produto cruzado dos ramos opostos é o mesmo, na forma escrita acima, ou a razão entre os dois resistores de um lado do

losango é igual à razão entre os dois do outro lado. As duas afirmações dizem a mesma coisa.

EXEMPLO 9.20 • Medida de resistência com a ponte

Numa ponte de Wheatstone em equilíbrio, os ramos conhecidos valem $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 400\,\Omega$ e $R_3 = 250\,\Omega$. Determine a resistência R_4 do quarto ramo, sabendo que R_1 e R_4 são opostos entre si, assim como R_2 e R_3.

NOTA

Em equilíbrio, tudo o que estiver no braço central fica irrelevante, porque não passa corrente por ele. Vale para um galvanômetro, para um amperímetro, para um resistor de qualquer valor e até para um fio. É por isso que a banca costuma pôr um resistor no braço central: ele não entra em conta nenhuma, e serve apenas para confundir.

1 Compreender

O assunto é a **condição de equilíbrio da ponte de Wheatstone**.

Objetivo. Obter o valor de R_4 que equilibra a ponte. O que está em jogo é saber quais resistores são opostos, porque a igualdade vale para os produtos cruzados e não para pares vizinhos; nenhum dado sobre a fonte é necessário, porque o equilíbrio não depende da tensão de alimentação.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.25) e diga o que cada símbolo significa. O detector sem corrente é o que autoriza usá-la.

2 Organizar

Dados $R_1 = 100\,\Omega$
$R_2 = 400\,\Omega$
$R_3 = 250\,\Omega$
ponte em equilíbrio, com R_1 oposto a R_4.

Conversões nenhuma: só ohms, em razão.

Estratégia aplique a Equação (9.25) e isole R_4.

3 Resolver

Condição de equilíbrio. Escreva-a e isole a incógnita:

$$\begin{aligned} R_1R_4 &= R_2R_3 \\ R_4 &= \frac{R_2R_3}{R_1} \\ &= \frac{400 \times 250}{100} \end{aligned}$$

$$\boxed{R_4 = 1\,000\,\Omega}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelas razões. De um lado a razão é $R_2/R_1 = 4$, e do outro ela precisa ser a mesma: $R_4/R_3 = 1\,000/250 = 4$, o

que confirma o resultado. Perceba a força do método: a resistência desconhecida foi obtida por comparação com três resistores padrão, e nenhum instrumento precisou medir corrente ou tensão com exatidão. Basta o detector distinguir corrente nula de corrente não nula, o que é muito mais fácil de garantir. É esse princípio que sustenta a célula de carga de uma balança rodoviária e o transmissor de pressão de uma unidade de processo, onde a deformação do elemento sensor desequilibra a ponte e o desequilíbrio vira o sinal de medição.

9.7 Instrumentos de Medida Elétrica

Toda grandeza deste capítulo é medida por algum instrumento, e a banca cobra tanto a leitura quanto o efeito que o próprio instrumento produz no circuito que veio medir. Esta seção fecha o capítulo com os três instrumentos que aparecem nas provas.

9.7.1 Galvanômetro, amperímetro e voltímetro

O **galvanômetro** é o elemento de base dos outros dois. Ele consiste numa bobina móvel num campo magnético, e o ângulo que o ponteiro gira é proporcional à **corrente** que passa pela bobina. Um galvanômetro mede corrente, e apenas isso. Com resistores associados a ele é que se constroem os demais: em paralelo com uma resistência pequena, o galvanômetro vira amperímetro de fundo de escala maior; em série com uma resistência grande, vira voltímetro.

O **amperímetro** mede corrente e por isso é ligado **em série** com o trecho de interesse, para ser atravessado pela mesma corrente que se quer medir. Ideal, ele tem resistência nula e não altera o circuito. Um amperímetro ideal se comporta, no desenho, como um pedaço de fio.

O **voltímetro** mede diferença de potencial e por isso é ligado **em paralelo** com o trecho de interesse, para ficar submetido à mesma tensão. Ideal, ele tem resistência infinita, não desvia corrente nenhuma e também não altera o circuito. Um voltímetro ideal se comporta como um ramo aberto.

CUIDADO

Trocar a ligação dos dois é erro grave, e não apenas de conta. Um amperímetro ideal ligado em paralelo com um resistor o curto-circuita, e a corrente que passa a circular é limitada apenas pelo resto do circuito. Já um voltímetro ideal ligado em série interrompe o ramo, e a corrente vai a zero.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2005
Dentre as grandezas físicas citadas abaixo, qual delas pode ser medida por meio de um galvanômetro?

(A) Tensão elétrica.
(B) Campo elétrico.
(C) Resistência elétrica.
(D) Força elétrica.
(E) Corrente elétrica.

48QVG7

9.7.2 Instrumento real e o efeito de carga

Instrumento ideal não existe. Um amperímetro real tem resistência pequena, mas não nula, e um voltímetro real tem resistência grande, mas não infinita. Um multímetro digital de bancada costuma apresentar $10\,\mathrm{M\Omega}$ na escala de tensão contínua.

A consequência é que o instrumento altera o circuito que veio medir, e a leitura que ele mostra é a do circuito *já alterado*. Esse desvio se chama **efeito de carga**. No voltímetro, ele acontece porque a resistência do instrumento entra em paralelo com o trecho medido, e o paralelo é sempre menor que qualquer uma das partes: a resistência do trecho cai, a tensão sobre ele cai junto, e o instrumento indica menos do que havia antes de ele chegar.

EXEMPLO 9.21 • Quanto o voltímetro muda a própria medida

Dois resistores iguais, de $100\,\mathrm{k\Omega}$ cada, estão em série sob $12\,\mathrm{V}$. Um voltímetro de resistência interna $R_V = 100\,\mathrm{k\Omega}$ é ligado aos terminais do segundo resistor. Determine (a) a tensão que havia sobre esse resistor antes da medição e (b) a tensão que o voltímetro indica.

DICA

O erro de carga do voltímetro é desprezível quando a resistência dele é muito maior que a do trecho medido. A regra prática de campo é exigir pelo menos cem vezes. Medir $10\,\mathrm{V}$ sobre um resistor de $10\,\mathrm{k\Omega}$ com um voltímetro de $10\,\mathrm{M\Omega}$ é seguro; medir sobre um de $1\,\mathrm{M\Omega}$ com o mesmo instrumento já desloca a leitura em vários por cento.

1 Compreender

O assunto é o **efeito de carga** do voltímetro.

Objetivo. Obter a tensão que havia sobre o segundo resistor antes da medição e a que o voltímetro indica. O que está em jogo é ver que a resistência do instrumento entra em paralelo com o resistor medido, o par passa a valer menos que $100\,\mathrm{k\Omega}$, e o divisor deixa de ser simétrico: a tensão medida é a do circuito novo. O valor de R_V é propositalmente ruim, igual ao do trecho, para o efeito aparecer grande.

Antes de seguir, escreva a Equação (9.13) e diga o que cada símbolo significa. Antes e depois, trocando R_2 pelo paralelo $R_2 \parallel R_V$ no segundo caso.

2 Organizar

Dados $R_1 = R_2 = 100\,\text{k}\Omega$
$U = 12\,\text{V}$
$R_V = 100\,\text{k}\Omega$ em paralelo com R_2.

Conversões nenhuma: os quilo-ohms ficam, porque só entram em razão no divisor.

Estratégia aplique o divisor de tensão da Equação (9.13) antes e depois, trocando R_2 pelo paralelo $R_2 \parallel R_V$ no segundo caso.

3 Resolver

(a) Tensão antes da medição. Dois resistores iguais repartem a tensão ao meio:

$$\boxed{U_2 = 6{,}0\,\text{V}}$$

(b) Paralelo do voltímetro com o resistor. Associe os dois:

$$R_2 \parallel R_V = \frac{100}{2} = 50\,\text{k}\Omega$$

Tensão medida. Divisor de tensão no circuito novo:

$$\begin{aligned} U_2' &= U\,\frac{50}{100+50} \\ &= 12 \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\boxed{U_2' = 4{,}0\,\text{V}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo sentido do desvio. A leitura tinha de sair *menor* que a tensão original, porque o voltímetro só pode acrescentar caminho para a corrente, nunca tirar, e o resultado confirma: 4,0 V contra os 6,0 V que existiam. O erro é de um terço, e não é do instrumento: ele está indicando com fidelidade a tensão do circuito enquanto ele está ligado. Perceba a lição prática: num circuito de baixa resistência, como o de uma bateria alimentando lâmpadas, esse efeito é invisível, porque 10 MΩ ao lado de alguns ohms não desvia corrente nenhuma. Ele aparece justamente nos circuitos de alta re-

sistência da instrumentação, que é onde o técnico precisa se lembrar dele.

CAIU NA PETROBRAS

BV5CB7

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010

O circuito mostrado na figura abaixo é composto por uma bateria, de força eletromotriz 10 V e resistência interna desprezível, e dois resistores em série, com resistências de 2 MΩ e 1 MΩ. Em um dos resistores, há um voltímetro, cuja resistência interna vale 10 MΩ.

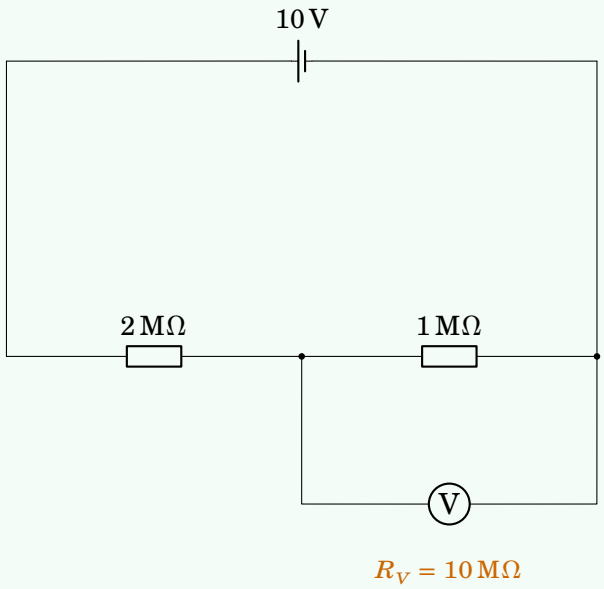


Figura 9.15

A indicação do voltímetro, em volts, é

(A) 6,87
(B) 6,66
(C) 6,52
(D) 3,33
(E) 3,13

CAPÍTULO

10

Eletromagnetismo

A formulação dessas equações é o acontecimento mais importante da física desde o tempo de Newton, não só pela riqueza do seu conteúdo, mas também porque elas formam o modelo de um novo tipo de lei.

ALBERT EINSTEIN E LEOPOLD INFELD

Quatro equações juntaram num só corpo a eletricidade e o magnetismo e revelaram a luz como onda eletromagnética. Einstein e Infeld viram nelas um novo tipo de lei, e disseram isso em *A Evolução da Física* (*The Evolution of Physics*), o livro de 1938 em que os dois contam a história das ideias da Física para o leitor comum, quase sem equações. O novo tipo de lei é a lei de campo: ela não descreve corpos agindo a distância, descreve como o campo em cada ponto muda com o tempo. Este capítulo percorre o caminho que levou até lá: o campo magnético, a força sobre cargas e correntes, a indução de Faraday e, no fim, as ondas que ligam a plataforma à costa.

O **eletromagnetismo** é a teoria que unifica os fenômenos elétricos e magnéticos, revelando que campos elétricos variáveis geram campos magnéticos e vice-versa. Essa interação dá origem às ondas eletromagnéticas, da mesma natureza que a luz visível, e fundamenta dispositivos como motores, transformadores e geradores.

Na indústria de petróleo e gás, o eletromagnetismo está presente em toda a cadeia produtiva: motores elétricos acionam bombas de injeção e compressores; transformadores distribuem energia em plata-

formas e refinarias; a indução eletromagnética é a base dos medidores de vazão eletromagnéticos em dutos; câmeras de termografia infravermelha inspecionam trocadores de calor e isolamentos; e sistemas de comunicação por radiofrequência interligam plataformas offshore à costa.

Neste capítulo, você aprenderá a:

- Calcular a força magnética sobre cargas em movimento e sobre condutores percorridos por corrente, e o raio da trajetória circular de uma carga em campo uniforme;
- Determinar o campo magnético criado por fio retilíneo, espira e solenoide;
- Aplicar as leis de Faraday e de Lenz à indução eletromagnética;
- Analisar o transformador ideal pela relação de transformação;
- Calcular comprimento de onda, energia do fóton e potência de radiação térmica, pelas leis de Stefan-Boltzmann e de Wien.

10.1 Magnetismo e Campo Magnético

DEFINIÇÃO 10.1 • Campo Magnético

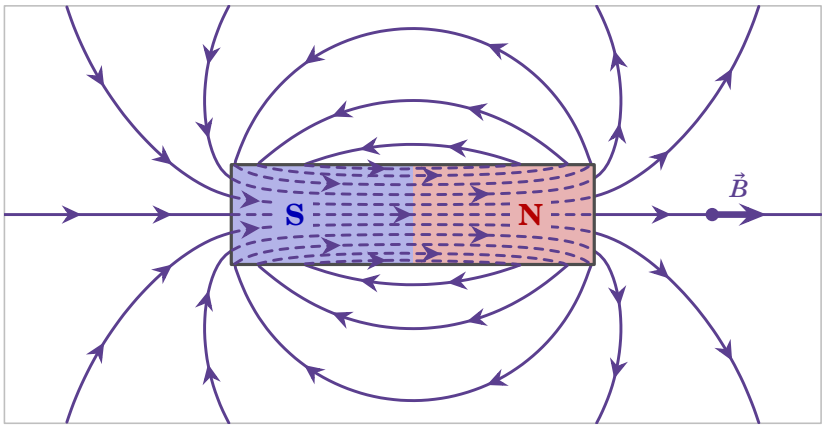
O **campo magnético** ($\vec{B}$) é uma grandeza vetorial que representa a região do espaço onde forças magnéticas atuam sobre cargas em movimento ou sobre ímãs. A unidade SI é o **tesla** (T). Um campo de 1 T exerce força de 1 N sobre uma carga de 1 C movendo-se a 1 m/s perpendicularmente ao campo.

O magnetismo tem duas origens: **ímãs permanentes** (materiais ferromagnéticos com domínios magnéticos alinhados) e **correntes elétricas** (cargas em movimento criam campo magnético ao redor do condutor).

As **linhas de campo magnético** são sempre curvas fechadas: saem do polo norte e entram no polo sul externamente ao ímã, e voltam pelo interior. Isso reflete um fato fundamental: não existem monopolos magnéticos isolados.

NOTA

Repare que parte das linhas sai pelas faces laterais do ímã, perto das pontas, e não só pela face da ponta: é isso que as limalhas de ferro revelam. Os laços maiores fecham fora do recorte, e a linha do eixo só se fecha muito longe. O que importa aqui: cada linha é fechada e, por fora, vai do N para o S.



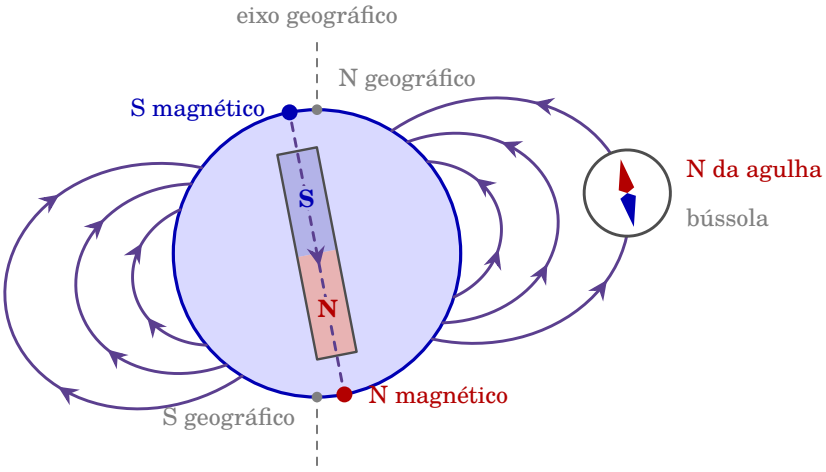
— $\vec{B}$: linhas de campo; tracejadas dentro do ímã

os laços maiores seguem além do recorte

Figura 10.1

10.1.1 Campo Magnético Terrestre

A Terra se comporta como um grande ímã dipolar. Seu polo magnético sul fica próximo ao polo geográfico norte, e é por isso que o polo norte de uma bússola aponta para o norte geográfico.



— $\vec{B}$: linhas do campo terrestre

Figura 10.2

DICA

As linhas de campo magnético são **sempre fechadas**, ao contrário das linhas de campo elétrico, que começam em cargas positivas e terminam em negativas. Isso decorre da inexistência de monopolos magnéticos.

NOTA

O campo magnético terrestre tem intensidade de cerca de $50\,\mu$T na superfície. Ele nos protege da radiação cósmica e é usado na navegação há séculos por meio de bússolas.

10.2 Força Magnética

10.2.1 Força sobre Carga em Movimento — Lei de Lorentz

Quando uma carga elétrica q se move com velocidade v em uma região de campo magnético B, ela sofre uma força perpendicular tanto a $\vec{v}$ quanto a $\vec{B}$:

$$F = |q|\, v\, B\, \operatorname{sen}\theta \tag{10.1}$$

F: módulo da força magnética (N)
$|q|$: módulo da carga (C)
v: velocidade da carga (m/s)
B: módulo do campo magnético (T)
θ: ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{B}$

A força é máxima quando $\theta = 90°$ e nula quando $\vec{v} \parallel \vec{B}$.

NOTA

A força magnética **nunca realiza trabalho**: ela é sempre perpendicular ao deslocamento, portanto não altera a energia cinética da partícula. Ela muda a *direção* do movimento, mas não a velocidade escalar.

Regra da mão direita. Para uma carga positiva, aponte os dedos no sentido de $\vec{v}$ e curve-os no sentido de $\vec{B}$; o polegar indica o sentido de $\vec{F}$. Para carga negativa, o sentido da força é oposto.

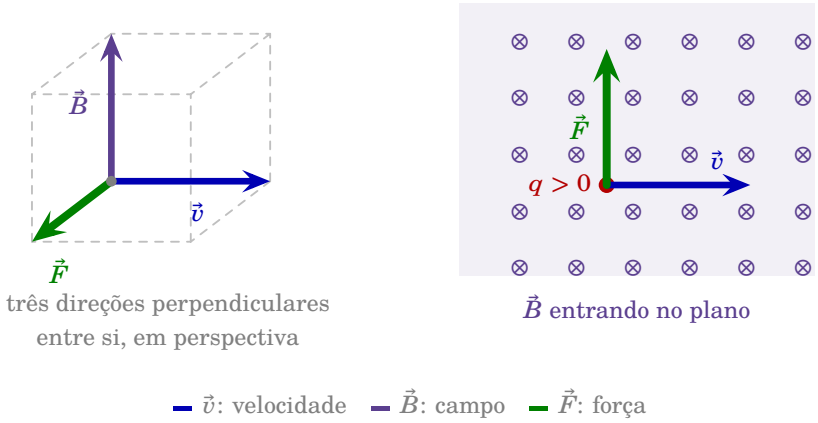


Figura 10.3

CUIDADO

Para cargas **negativas** (elétrons), o sentido da força é **oposto** ao indicado pela regra da mão direita.

10.2.2 Trajetória Circular em Campo Uniforme

Quando uma carga entra perpendicularmente num campo uniforme, a força de Lorentz atua como força centrípeta, impondo trajetória circular de raio:

$$r = \frac{m\, v}{|q|\, B} \tag{10.2}$$

r: raio da trajetória circular (m)
m: massa da partícula (kg)
v: velocidade da partícula (m/s)

$|q|$: módulo da carga (C)
B: módulo do campo magnético (T)

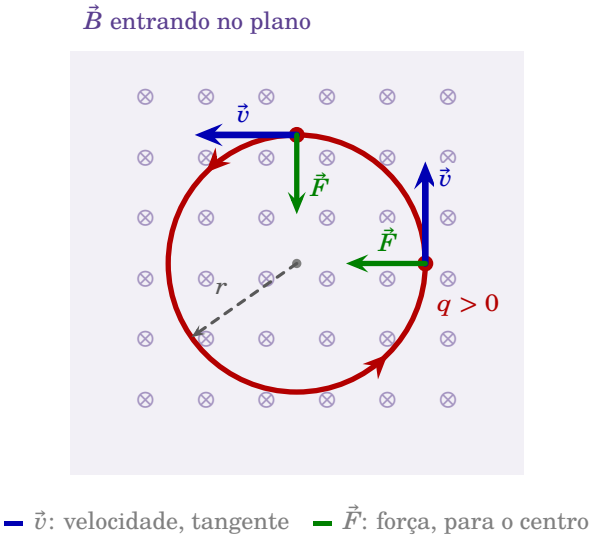


Figura 10.4

EXEMPLO 10.1 • Próton em campo magnético

Um próton ($m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C) entra perpendicularmente em uma região de campo magnético uniforme $B = 0{,}5$ T com velocidade $v = 2 \times 10^6$ m/s. Determine: (a) a força magnética sobre o próton; (b) o raio da trajetória circular; (c) o período do movimento.

1 Compreender

O assunto é a **força magnética sobre uma carga em movimento** e, na sequência, o que essa força faz com a trajetória.

Objetivo. Obter três números encadeados: a força, o raio da trajetória e o período. O que está em jogo é reconhecer que eles não são três problemas independentes: a força de Lorentz é a força centrípeta deste movimento, dela sai o raio, e do raio sai o período.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.1) e diga o que cada símbolo significa. A palavra *perpendicularmente* no enunciado fixa $\theta = 90°$, o que põe $\operatorname{sen}\theta$ em seu valor máximo. Como a força magnética é sempre perpendicular ao deslocamento, ela não realiza trabalho e o módulo da velocidade não muda, de modo que a trajetória é uma circunferência percorrida com velocidade escalar constante, e não uma espiral que se abre ou se fecha.

2 **Organizar**

Dados $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$
$q = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$
$B = 0{,}5\,\text{T}$
$v = 2 \times 10^{6}\,\text{m/s}$
$\theta = 90°$.

Conversões nenhuma: tudo no SI.

Estratégia aplique a Equação (10.1) com $\operatorname{sen} 90° = 1$; depois a Equação (10.2) para o raio; e feche com $T = 2\pi r/v$, que é o comprimento da circunferência dividido pela velocidade escalar.

3 **Resolver**

(a) Força de Lorentz. Com $\theta = 90°$ o seno vale 1 e a expressão se reduz ao produto dos três módulos:

$$\begin{aligned} F &= |q|\,v\,B \\ &= 1{,}6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{6} \times 0{,}5 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 1{,}6 \times 10^{-13}\,\text{N}}$$

(b) Do equilíbrio centrípeto para o raio. Igualar a força de Lorentz à resultante centrípeta mv^2/r e isolar r produz a Equação (10.2):

$$\begin{aligned} r &= \frac{m\,v}{|q|\,B} \\ &= \frac{1{,}67 \times 10^{-27} \times 2 \times 10^{6}}{1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}5} \\ &= \frac{3{,}34 \times 10^{-21}}{8{,}0 \times 10^{-20}} \end{aligned}$$

$$\boxed{r = 4{,}2 \times 10^{-2}\,\text{m} = 4{,}2\,\text{cm}}$$

(c) Do raio para o período. Uma volta completa tem comprimento $2\pi r$, percorrido com velocidade escalar constante:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi r}{v} \\ &= \frac{2\pi \times 4{,}2 \times 10^{-2}}{2 \times 10^{6}} \end{aligned}$$

$$\boxed{T = 1{,}3 \times 10^{-7}\,\text{s}}$$

4 **Avaliar**

Substitua r da Equação (10.2) na expressão do período: sobra $T = 2\pi m/(|q|B)$, sem v nenhum. O período não depende da velocidade: uma partícula mais rápida descreve um círculo maior e leva o mesmo tempo para completá-lo. É isso que torna possível o cíclotron: com o tempo de meia-volta sempre igual, basta inverter a tensão dos eletrodos em intervalos regulares.

Avalie também a ordem de grandeza. Um raio de centímetros num campo de meio tesla é a escala dos espectrômetros de massa, que separam íons por $r = mv/(|q|B)$: fixados v e B, o raio denuncia a razão massa por carga. É assim que se separam metano, etano e propano numa amostra de gás natural.

10.2.3 Força sobre Condutor com Corrente

Um fio de comprimento L percorrido por corrente i, imerso em campo B, sofre força:

$$F = B\,i\,L\,\operatorname{sen}\theta \tag{10.3}$$

F: módulo da força sobre o condutor (N)
B: módulo do campo magnético (T)
i: corrente no condutor (A)
L: comprimento do condutor dentro do campo (m)
θ: ângulo entre o condutor e $\vec{B}$

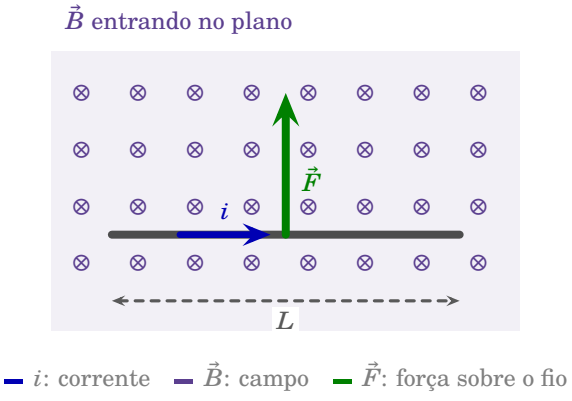


Figura 10.5

NOTA

Esta é a base dos **motores elétricos**: a força sobre condutores percorridos por corrente, em campo magnético de ímãs permanentes ou eletroímãs, produz o torque que aciona compressores, bombas e ventiladores.

EXEMPLO 10.2 • Força sobre fio condutor

Um fio retilíneo de comprimento $L = 30\,\text{cm}$ é percorrido por corrente $i = 8\,\text{A}$ e está orientado perpendicularmente a um campo magnético uniforme $B = 0{,}25\,\text{T}$. Calcule a força magnética sobre o fio.

1 Compreender

O assunto é a **força magnética sobre um condutor percorrido por corrente**.

Objetivo. Obter o módulo da força sobre o fio. O que está em jogo é lembrar que se trata da mesma força de Lorentz do tópico anterior, agora somada sobre todos os portadores que atravessam o fio: por isso a carga q e a velocidade v dão lugar ao produto da corrente pelo comprimento.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.3) e diga o que cada símbolo significa. A palavra *perpendicularmente* fixa $\theta = 90°$ e leva o seno ao valor máximo. O comprimento veio em centímetros, e a expressão exige metros.

2 Organizar

Dados $L = 30\,\text{cm}$
$i = 8\,\text{A}$
$B = 0{,}25\,\text{T}$
$\theta = 90°$.

Conversões $L = 30\,\text{cm} = 0{,}30\,\text{m}$, porque o tesla é definido a partir do metro.

Estratégia aplique a Equação (10.3) com $\operatorname{sen} 90° = 1$.

3 Resolver

Força sobre o fio. Com o seno igual a 1, a força é o produto dos três módulos:

$$\begin{aligned} F &= B\,i\,L \\ &= 0{,}25 \times 8 \times 0{,}30 \end{aligned}$$

$$\boxed{F = 0{,}60\,\text{N}}$$

4 Avaliar

Avalie a coerência pelo caso-limite. Gire o fio até deixá-lo paralelo ao campo: θ vai a zero, o seno vai a zero e a força some, porque a

força magnética só existe quando a velocidade das cargas atravessa as linhas de campo.

Seis décimos de newton parecem pouco, e é esse o ponto que explica um motor. Um condutor de trinta centímetros produz uma força de gramas; o que vira torque útil é a repetição: uma armadura com centenas de espiras multiplica a força centenas de vezes, e o núcleo ferromagnético eleva B de décimos para mais de um tesla. É essa dupla multiplicação que faz um motor girar uma bomba de injeção numa plataforma.

CAIU NA PETROBRAS

5YC5NX

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2010
Conforme esquematizado na figura abaixo, um condutor metálico retilíneo, de massa m e comprimento L, é suspenso por um dinamômetro D de massa desprezível e mantido em equilíbrio, na direção horizontal, em uma região na qual existe um campo magnético uniforme, constante no espaço e no tempo, de intensidade B. O fio se encontra perpendicularmente às linhas de indução magnética. A aceleração da gravidade local é g.

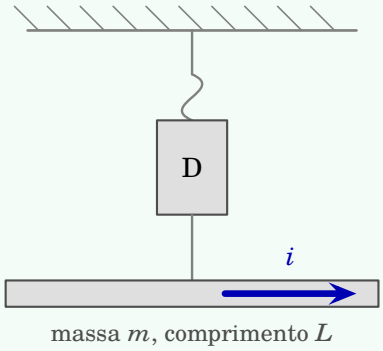


Figura 10.6

Considerando-se uma situação em que a leitura no dinamômetro é nula, a corrente elétrica i no condutor e o sentido do vetor indução magnética $\vec{B}$ devem ser, respectivamente,

(A) $\frac{BL}{mg}$ e vertical para baixo.
(B) $\frac{BL}{mg}$ e saindo do plano da página.
(C) $\frac{mg}{BL}$ e vertical para cima.
(D) $\frac{mL}{Bg}$ e saindo do plano da página.
(E) $\frac{mg}{BL}$ e entrando no plano da página.

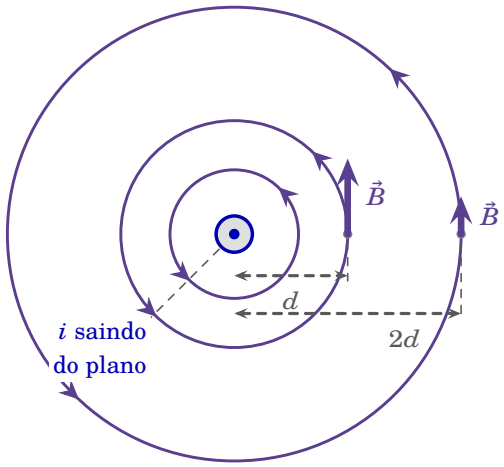
10.3 Campo Magnético Criado por Correntes

10.3.1 Fio Retilíneo Longo

Um fio percorrido por corrente i cria campo magnético circular ao seu redor. A intensidade a uma distância d do fio é:

$$B = \frac{\mu_0 \, i}{2\pi \, d} \tag{10.4}$$

B: módulo do campo a uma distância d do fio (T)
μ_0: permeabilidade magnética do vácuo, $4\pi \times 10^{-7}$ (T · m/A)
i: corrente no fio (A)
d: distância do eixo do fio ao ponto (m)



$\vec{B}$: tangente à circunferência
setas de $\vec{B}$ em escala

Figura 10.7

DICA

Para o sentido do campo ao redor de um fio: aponte o polegar da mão direita no sentido da corrente; os dedos curvados indicam o sentido de $\vec{B}$.

10.3.2 Espira Circular

Uma espira de raio R percorrida por corrente i cria, em seu centro:

$$B = \frac{\mu_0 \, i}{2R} \tag{10.5}$$

B: módulo do campo no centro da espira (T)
i: corrente na espira (A)
R: raio da espira (m)

Para N espiras sobrepostas no mesmo raio, o que se chama **bobina plana**, cada uma contribui com o seu próprio campo e os efeitos se somam:

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2R} \tag{10.6}$$

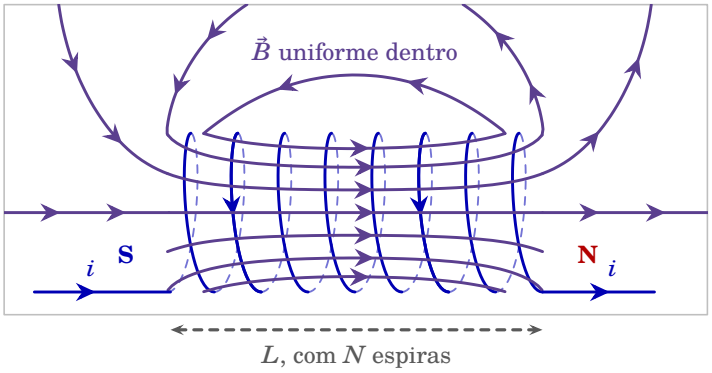
N: número de espiras sobrepostas

10.3.3 Solenoide

O **solenoide** é uma bobina cilíndrica longa com N espiras distribuídas ao longo do comprimento L. No interior, o campo é uniforme e vale:

$$B = \mu_0 n i \qquad \text{com} \qquad n = \frac{N}{L} \tag{10.7}$$

B: módulo do campo no interior do solenoide (T)
n: número de espiras por metro (1/m)
N: número total de espiras
L: comprimento do solenoide (m)
i: corrente nas espiras (A)



$\vec{B}$: linhas de campo i: corrente nas espiras

laços de baixo omitidos, por simetria; os maiores seguem além do recorte

Figura 10.8

EXEMPLO 10.3 • Campo de fio retilíneo

Um fio retilíneo muito longo é percorrido por corrente $i = 10\,\text{A}$. Calcule o campo magnético a uma distância $d = 5\,\text{cm}$ do fio. ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T m/A}$)

1 COMPREENDER

O assunto é o **campo magnético criado por um fio retilíneo longo**.

Objetivo. Obter a intensidade do campo num ponto a cinco centímetros do fio. O que está em jogo é notar que o resultado depende da

NOTA

Válvulas solenoides, relés e atuadores lineares usados em refinarias e plataformas são baseados neste princípio: a corrente no solenoide cria o campo que atrai ou repele um núcleo ferromagnético móvel.

distância, e não de uma posição definida por dois eixos: o campo tem o mesmo valor em todos os pontos da circunferência de raio d traçada em torno do fio, mudando apenas de direção.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.4) e diga o que cada símbolo significa. Ela vale para fio *muito longo*, hipótese que o enunciado declara e que dispensa considerar o que acontece perto das extremidades.

2 Organizar

Dados $i = 10\,\text{A}$
$d = 5\,\text{cm}$
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T m/A}.$

Conversões $d = 5\,\text{cm} = 0{,}05\,\text{m}.$

Estratégia aplique a Equação (10.4), cuidando de simplificar o π que aparece nos dois termos da fração.

3 Resolver

Campo a 5 cm do fio. Simplificar o π que aparece em cima e embaixo deixa a conta em números redondos:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0\, i}{2\pi\, d} \\ &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10}{2\pi \times 0{,}05} \\ &= \frac{4 \times 10^{-6}}{0{,}10} \end{aligned}$$

$$B = 4 \times 10^{-5}\,\text{T} = 40\,\mu\text{T}$$

4 Avaliar

Compare com os $50\,\mu$T do campo magnético terrestre, da abertura deste capítulo: dez ampères, a corrente de um chuveiro pequeno, produzem a cinco centímetros do fio um campo da ordem do campo do planeta inteiro. O que salva a bússola é a queda com a distância: a um metro do fio o campo já caiu vinte vezes.

A dependência é com $1/d$, não com $1/d^2$ como na lei de Coulomb do cap. 8, e a origem é geométrica: a carga pontual espalha sua influência sobre esferas, cuja área cresce com d^2; o fio, sobre cilindros, cuja área lateral cresce só com d. Por isso o campo de um cabo de alta tensão alcança mais longe do que você espera.

EXEMPLO 10.4 • Campo no interior de solenoide

Um solenoide de comprimento $L = 20\,\text{cm}$ possui $N = 500$ espiras e é percorrido por corrente $i = 2\,\text{A}$. Determine o campo magnético em seu interior.

1 Compreender

O assunto é o **campo no interior de um solenoide**.

Objetivo. Obter a intensidade do campo dentro do solenoide. O que está em jogo é a grandeza que entra na fórmula: quantas espiras cabem em cada metro de comprimento, e não o total delas. Duzentas espiras em dez centímetros produzem o mesmo campo que quatrocentas em vinte, porque o que importa é o aperto do enrolamento.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.7) e diga o que cada símbolo significa. Por isso o cálculo tem dois estágios, primeiro a densidade linear de espiras, depois o campo. O enunciado não menciona a posição do ponto porque, num solenoide longo, o campo interno é praticamente uniforme.

2 Organizar

Dados $L = 20\,\text{cm}$
$N = 500$
$i = 2\,\text{A}$
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{T m/A}$.

Conversões $L = 20\,\text{cm} = 0{,}20\,\text{m}$.

Estratégia calcule a densidade de espiras $n = N/L$ e leve-a à Equação (10.7).

3 Resolver

(a) Densidade de espiras. Divida o número de voltas pelo comprimento do enrolamento:

$$n = \frac{N}{L} = \frac{500}{0{,}20}$$

$$\boxed{n = 2\,500\ \text{espiras/m}}$$

(b) Campo no interior. Leve n à expressão do solenoide:

$$\begin{aligned} B &= \mu_0\, n\, i \\ &= 4\pi \times 10^{-7} \times 2\,500 \times 2 \\ &= 2\pi \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\boxed{B = 6{,}3 \times 10^{-3}\ \text{T} = 6{,}3\ \text{mT}}$$

4 Avaliar

Confronte este resultado com o do exemplo anterior. Lá, dez ampères num fio reto davam $40\,\mu$T a cinco centímetros; aqui, dois ampères dão $6\,300\,\mu$T: mais de cento e cinquenta vezes mais campo com cinco vezes menos corrente. A diferença está no enrolamento: as duas mil e quinhentas espiras por metro somam suas contribuições no eixo. Enrolar o fio é o modo barato de conseguir campo forte.

Ainda assim, 6,3 mT é pouco diante do que a indústria e a medicina precisam. Um aparelho de ressonância magnética trabalha entre um e três tesla, quinhentas vezes mais, e nenhum enrolamento de cobre sustenta essa corrente sem derreter: esses ímãs usam bobinas supercondutoras resfriadas a hélio líquido.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2012

Um solenoide sem núcleo possui 100 espiras, resistência elétrica igual a 0,2 Ω e 15 cm de comprimento. Considere seu diâmetro bem menor que seu comprimento.

Se ele for ligado a uma fonte de voltagem contínua de 1,5 V, qual será, aproximadamente, em mT, a intensidade do campo magnético na região central do seu interior?

Dado: permeabilidade magnética do vácuo igual a 12×10^{-7} T·m/A.

(A) 18

(B) 7,5

(C) 6,0

(D) 3,8

(E) 1,5

GXR3CB

10.4 Indução Eletromagnética

DEFINIÇÃO 10.2 • Fluxo Magnético

O **fluxo magnético** (Φ) através de uma superfície plana de área A em campo B é o produto do campo pela área e pelo cosseno do ângulo entre $\vec{B}$ e a normal à superfície. A unidade é o weber (Wb), e $1\,\text{Wb} = 1\,\text{T}\,\text{m}^2$.

$$\Phi = BA\cos\theta \tag{10.8}$$

Φ: fluxo magnético (Wb)
B: módulo do campo magnético (T)
A: área da superfície (m^2)
θ: ângulo entre $\vec{B}$ e a normal à superfície

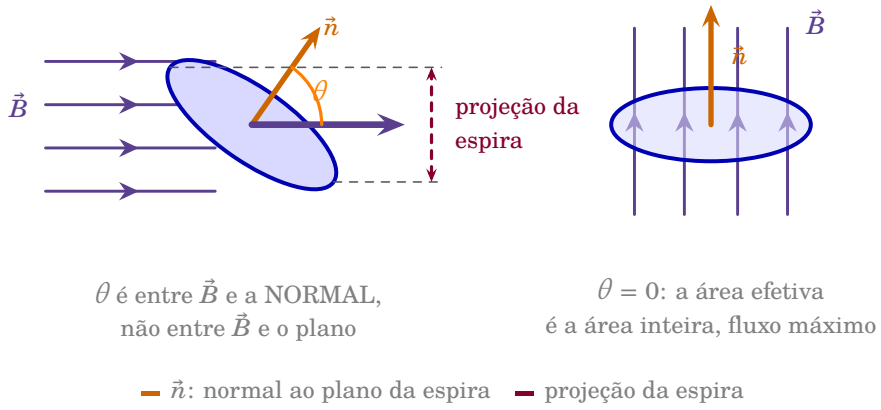


Figura 10.9

10.4.1 Lei de Faraday

DEFINIÇÃO 10.3 • Lei de Faraday

Uma **variação** do fluxo magnético através de uma espira induz nela uma força eletromotriz (fem), igual à taxa com que o fluxo varia, multiplicada pelo número de espiras. A fem resulta em corrente induzida se o circuito estiver fechado.

$$|\varepsilon| = N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \tag{10.9}$$

$|\varepsilon|$: módulo da força eletromotriz induzida (V)
N: número de espiras
$|\Delta\Phi|$: módulo da variação do fluxo (Wb)
Δt: intervalo em que o fluxo varia (s)

10.4.2 Lei de Lenz

DEFINIÇÃO 10.4 • Lei de Lenz

O sentido da corrente induzida é sempre tal que o campo magnético criado por ela se **opõe** à variação do fluxo que a originou.

DICA

A Lei de Lenz é consequência direta da conservação de energia: se a corrente induzida reforçasse a variação do fluxo, teríamos amplificação espontânea de energia, o que é impossível.

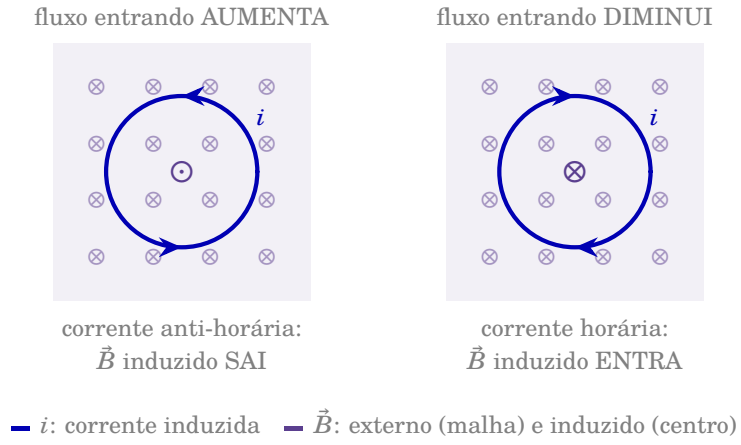


Figura 10.10

O fluxo pode variar por quatro mecanismos: (1) variar a intensidade de B; (2) variar a área A da espira; (3) variar o ângulo θ (rotação da espira, que é o princípio do gerador elétrico); (4) mover a espira em campo não uniforme.

EXEMPLO 10.5 • fem induzida em espira quadrada

Uma espira quadrada de lado $\ell = 10\,\text{cm}$ está imersa em campo magnético perpendicular ao seu plano. O campo aumenta uniformemente de $B_i = 0{,}2\,\text{T}$ para $B_f = 0{,}8\,\text{T}$ em $\Delta t = 0{,}1\,\text{s}$. Calcule: (a) a variação do fluxo; (b) a fem induzida; (c) o sentido da corrente induzida segundo a Lei de Lenz.

1 Compreender

O assunto é a **lei de Faraday** e, na última parte, a **lei de Lenz**.

Objetivo. Obter de quanto variou o fluxo, que força eletromotriz essa variação induziu e em que sentido a corrente circula. O que está em jogo é entender que o fluxo aqui muda por um único dos quatro mecanismos possíveis: a espira não se move, não gira e não se deforma, apenas o campo cresce; área e ângulo ficam constantes, e toda a variação do fluxo recai sobre B.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.9) e diga o que cada símbolo significa. Repare que o enunciado dá os valores inicial e final do campo, não a taxa de variação, e que a fem depende da rapidez da

mudança, não do valor final alcançado. O fluxo vem da Equação (10.8).

2 Organizar

Dados $\ell = 10\,\text{cm}$
$B_i = 0{,}2\,\text{T}$
$B_f = 0{,}8\,\text{T}$
$\Delta t = 0{,}1\,\text{s}$
$N = 1$.

Conversões $\ell = 10\,\text{cm} = 0{,}10\,\text{m}$.

Estratégia calcule a área da espira; leve a variação do campo à Equação (10.8) com $\cos 0° = 1$; divida pelo intervalo, segundo a Equação (10.9); e decida o sentido pela lei de Lenz.

3 Resolver

(a) Da variação do campo para a variação do fluxo. Com área e ângulo fixos, basta multiplicar a variação de B pela área:

$$\begin{aligned} A &= \ell^2 = (0{,}10)^2 = 0{,}010\,\text{m}^2 \\ \Delta\Phi &= (B_f - B_i)\,A \\ &= (0{,}8 - 0{,}2) \times 0{,}010 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta\Phi = 6{,}0 \times 10^{-3}\,\text{Wb} = 6{,}0\,\text{mWb}}$$

(b) Da variação do fluxo para a fem. Divida pelo intervalo de tempo, com $N = 1$:

$$\begin{aligned} |\varepsilon| &= N\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t} \\ &= \frac{6{,}0 \times 10^{-3}}{0{,}10} \end{aligned}$$

$$\boxed{|\varepsilon| = 6{,}0 \times 10^{-2}\,\text{V} = 60\,\text{mV}}$$

(c) Sentido, pela lei de Lenz. O fluxo que entra na espira está aumentando. A corrente induzida se opõe a esse aumento, criando dentro da espira um campo que *sai*. Aponte o polegar da mão direita no sentido desse campo induzido e os dedos curvados darão o sentido da corrente:

A corrente induzida é anti-horária, vista do lado de onde o campo induzido sai.

4 **Avaliar**

Avalie a coerência pelo que governa a fem. Sessenta milivolts saem de uma variação modesta, 6 T/s, numa única espira de um centésimo de metro quadrado. Para subir esse número há três caminhos, todos na Equação (10.9): área maior, variação mais rápida ou mais espiras. O terceiro é o mais barato: mil espiras dariam 60 volts.

A parte (c) mostra que a lei de Lenz não é uma regra de sinal arbitrária. Se a corrente induzida *reforçasse* o aumento do fluxo, induziria mais corrente, mais fluxo, e a espira produziria energia do nada. A lei de Lenz é a conservação da energia em linguagem de indução, e é por ela que um gerador pesa mais com carga.

CAIU NA PETROBRAS

57GRVQ

CESGRANRIO — Transpetro, Operação, 2012

A figura abaixo mostra uma barra metálica MN que se desloca com velocidade constante $\vec{v}$ sobre trilhos metálicos paralelos. O sistema está submetido a um campo magnético uniforme $\vec{B}$ de intensidade 2,0 T perpendicular ao plano formado pelos condutores. Considere desprezível a resistência elétrica dos contatos entre a barra e os trilhos.

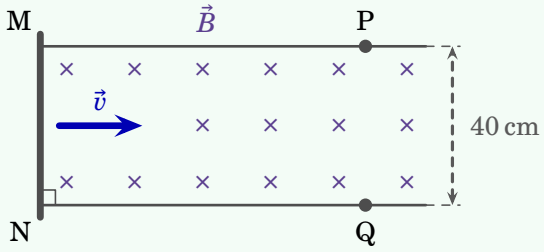


Figura 10.11

Qual deve ser, aproximadamente, em m/s, o módulo da velocidade $\vec{v}$ de forma que seja gerada uma força eletromotriz de módulo igual a 5,0 V entre os terminais P e Q do circuito?

(A) 1,0
(B) 2,5
(C) 3,6
(D) 4,0
(E) 6,3

744GGK

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2017

Em um experimento, um ímã percorre a trajetória reta AB, com velocidade constante, atravessando uma espira metálica conectada a um voltímetro, como mostra a figura.

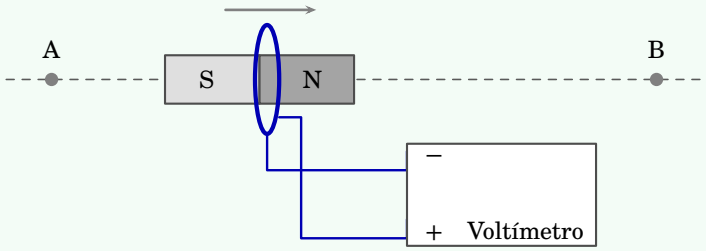
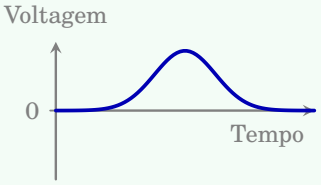


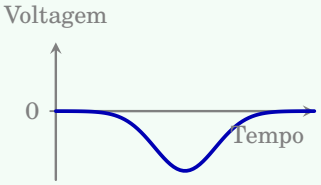
Figura 10.12

A voltagem indicada pelo voltímetro ao longo da trajetória do ímã é aproximadamente representada pelo seguinte gráfico:

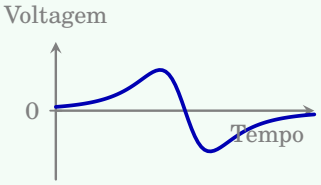
(A)



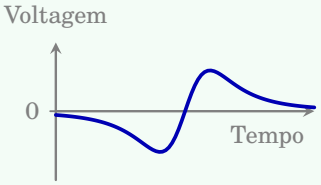
(B)



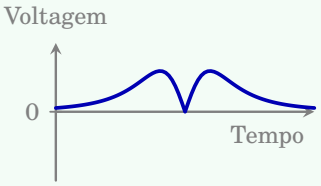
(C)



(D)



(E)



10.5 Transformadores

O **transformador** é um dispositivo que modifica tensões e correntes alternadas por indução mútua entre duas bobinas (primário e secundário) em torno de um núcleo ferromagnético comum.

Para um transformador ideal (sem perdas):

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{i_p}{i_s} \tag{10.10}$$

V_p, V_s: tensões no primário e no secundário (V)
N_p, N_s: números de espiras do primário e do secundário
i_p, i_s: correntes no primário e no secundário (A)

A potência se conserva: $P = V_p\, i_p = V_s\, i_s$.

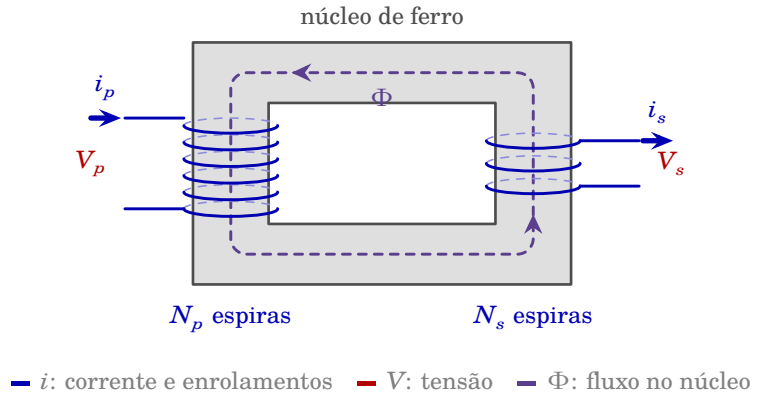


Figura 10.13

EXEMPLO 10.6 • Transformador abaixador

Um transformador ideal tem $N_p = 1000$ espiras no primário e $N_s = 50$ espiras no secundário. O primário é ligado a uma tensão de $V_p = 220\,\text{V}$. Determine: (a) a tensão no secundário; (b) a corrente no primário, sabendo que a corrente no secundário é $i_s = 6\,\text{A}$.

1 COMPREENDER

O assunto é a **relação de transformação** entre primário e secundário.

Objetivo. Obter a tensão que sai do secundário e a corrente que entra no primário. O que está em jogo é não confundir o que sobe com o que desce: se a tensão cai vinte vezes, a corrente sobe vinte vezes, porque num transformador ideal a potência que entra é a mesma que sai.

NOTA

Transformadores são essenciais na transmissão de energia: elevam a tensão para reduzir perdas na linha, já que $P_{\text{linha}} = R\, i^2$ e uma corrente menor dissipa menos, e depois abaixam para uso seguro. Em plataformas, transformadores de distribuição operam tipicamente em 13,8 kV, 4,16 kV e 480 V.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.10) e diga o que cada símbolo significa. Repare que o enunciado dá a corrente do secundário e pede a do primário, o que inverte a razão em relação à das tensões.

2 Organizar

Dados $N_p = 1\,000$
$N_s = 50$
$V_p = 220\,\text{V}$
$i_s = 6\,\text{A}$.

Conversões nenhuma: volts, ampères e razões de espiras.

Estratégia use a Equação (10.10) duas vezes: primeiro na razão entre tensões e espiras, depois na razão entre correntes e espiras, lembrando que esta última está invertida.

3 Resolver

(a) Do número de espiras para a tensão. A razão entre tensões acompanha a razão entre espiras:

$$\begin{aligned} V_s &= V_p \frac{N_s}{N_p} \\ &= 220 \times \frac{50}{1\,000} \end{aligned}$$

$$\boxed{V_s = 11\,\text{V}}$$

(b) Da conservação da potência para a corrente. Aqui a razão se inverte, porque $i_p/i_s = N_s/N_p$:

$$\begin{aligned} i_p &= i_s \frac{N_s}{N_p} \\ &= 6 \times \frac{50}{1\,000} \end{aligned}$$

$$\boxed{i_p = 0{,}30\,\text{A}}$$

4 Avaliar

Confira o resultado pela potência, o invariante do transformador ideal. No primário, $P_p = 220 \times 0{,}30 = 66\,\text{W}$; no secundário, $P_s = 11 \times 6 = 66\,\text{W}$. Se você tivesse invertido uma das razões e obtido $i_p = 120\,\text{A}$, essa verificação denunciaria o erro: o primário consumiria vinte e seis quilowatts para entregar sessenta e seis watts.

Um transformador real rende entre 95% e 99%, e a diferença vira calor em dois lugares: no núcleo, pela histerese e pelas correntes

parasitas, razão de ele ser feito de lâminas isoladas e não de um bloco maciço; e nos enrolamentos, pelo efeito Joule do cap. 9. É esse calor que os transformadores de uma plataforma precisam dissipar, e por isso muitos operam imersos em óleo mineral.

10.6 Ondas Eletromagnéticas

DEFINIÇÃO 10.5 • Ondas Eletromagnéticas

Ondas eletromagnéticas são perturbações compostas por campos elétrico e magnético oscilantes, perpendiculares entre si e à direção de propagação (**ondas transversais**). Elas não necessitam de meio material e, no vácuo, propagam-se todas com a mesma velocidade, a velocidade da luz.

$$c = \lambda f = 3 \times 10^8 \text{ m/s} \tag{10.11}$$

c: velocidade da luz no vácuo, 3×10^8 (m/s)
λ: comprimento de onda (m)
f: frequência (Hz)

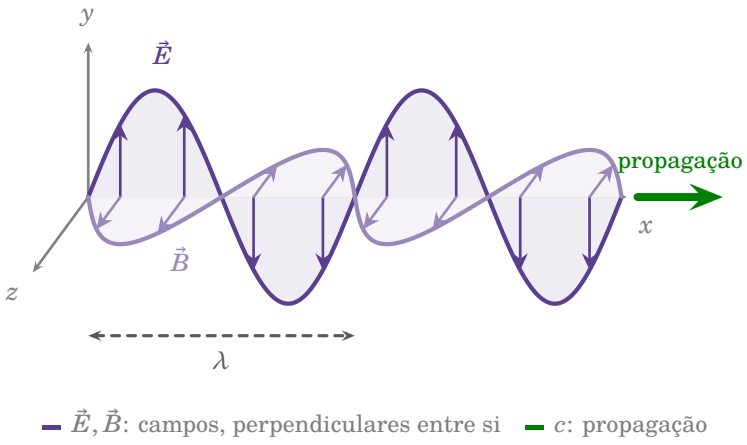


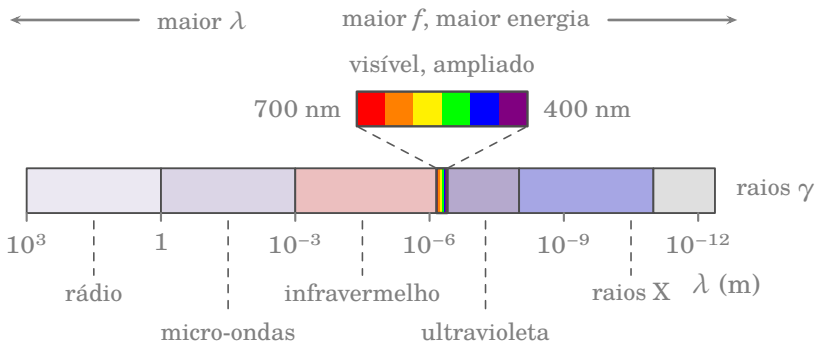
Figura 10.14

10.6.1 Espectro Eletromagnético

O **espectro eletromagnético** é a classificação das ondas EM por frequência (ou λ). Todas têm a mesma natureza, diferindo na energia do fóton:

NOTA

Em meios materiais, a velocidade da onda é $v = c/n$, onde $n > 1$ é o índice de refração. A frequência permanece inalterada; apenas λ e v mudam.



escala logarítmica: de uma marca à seguinte, λ cai mil vezes

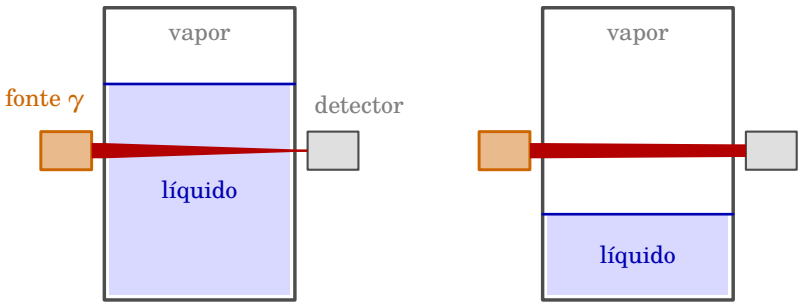
Figura 10.15

Tipo	λ	Frequência (Hz)	Aplicações
Ondas de rádio	acima de 1 m	abaixo de 3×10^8	Comunicação, radar
Micro-ondas	1 m a 1 mm	3×10^8–3×10^{11}	Fornos, celular, satélites
Infravermelho	1 mm a 700 nm	3×10^{11}–4×10^{14}	Termografia, controle remoto
Luz visível	700 a 400 nm	4×10^{14}–$7{,}5 \times 10^{14}$	Visão, iluminação
Ultravioleta	400 a 10 nm	$7{,}5 \times 10^{14}$–3×10^{16}	Esterilização, fluorescência
Raios X	10 nm a 10 pm	3×10^{16}–3×10^{19}	Radiografia industrial
Raios gama	abaixo de 10 pm	acima de 3×10^{19}	Radioterapia, medidores nucleares

Os raios gama têm uma aplicação direta na planta: o **medidor nuclear de nível**. Uma fonte fica de um lado do vaso e um detector do outro; a leitura cai quando o feixe atravessa líquido em vez de vapor, e nada toca o produto.

DICA

A energia do fóton cresce com a frequência: $E = h f$. Radiações de alta frequência (UV, raios X, gama) são **ionizantes**, porque seus fótons têm energia suficiente para arrancar elétrons de átomos.



nível alto: o feixe atravessa líquido e chega muito atenuado

nível baixo: atravessa vapor e chega quase inteiro

γ: feixe, da fonte ao detector

Figura 10.16

10.6.2 Refração: a Onda ao Mudar de Meio

Uma onda eletromagnética só alcança o valor c no vácuo. Ao penetrar num meio material transparente, ela desacelera, e o quanto desacelera é o que define o **índice de refração** do meio.

DEFINIÇÃO 10.6 • Índice de Refração

O **índice de refração** n de um meio é a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da onda naquele meio. Ele nunca é menor que 1, e vale exatamente 1 no vácuo.

$$n = \frac{c}{v} \tag{10.12}$$

n: índice de refração do meio (adimensional)
c: velocidade da onda no vácuo (m/s)
v: velocidade da onda no meio (m/s)

Ao atravessar a fronteira entre dois meios, uma grandeza muda e outra não, e distinguir as duas é o ponto que a banca cobra. A **frequência não muda**: ela é imposta pela fonte que gerou a onda, e o número de oscilações que chegam por segundo ao segundo meio tem de ser o mesmo que sai do primeiro, sob pena de a energia se acumular na interface. O que muda é a velocidade, e com ela o comprimento de onda, já que os três estão amarrados por $v = \lambda f$:

$$\lambda_{\text{meio}} = \frac{v}{f} = \frac{\lambda_{\text{vácuo}}}{n} \tag{10.13}$$

λ_{meio}: comprimento de onda no meio (m)
v: velocidade da onda no meio (m/s)
f: frequência, a mesma nos dois meios (Hz)
$\lambda_{\text{vácuo}}$: comprimento de onda no vácuo (m)
n: índice de refração do meio

CUIDADO

Ao mudar de meio, a frequência **permanece a mesma** e o comprimento de onda **diminui** na proporção do índice de refração. Trocar uma pela outra é o erro mais cobrado do assunto.

10.6.3 Energia do Fóton

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \tag{10.14}$$

E: energia de um fóton (J)

NOTA

Um feixe de laser de $600\,\text{nm}$ no ar passa a medir cerca de $400\,\text{nm}$ dentro de um vidro de $n = 1{,}5$, mas continua sendo a mesma luz, com a mesma frequência e a mesma cor.

h: constante de Planck, $6{,}63 \times 10^{-34}$ (J · s)
f: frequência da radiação (Hz)
c: velocidade da luz no vácuo (m/s)
λ: comprimento de onda (m)

EXEMPLO 10.7 • Comprimento de onda de rádio FM

Uma estação de rádio FM opera na frequência $f = 100\,\text{MHz}$. Determine: (a) o comprimento de onda; (b) a energia de cada fóton emitido.

1 Compreender

O assunto é a **equação fundamental da onda eletromagnética** e, depois, a **energia do fóton**.

Objetivo. Obter o comprimento de onda da emissão e a energia de um único fóton dela. O que está em jogo é reconhecer que as duas partes descrevem o mesmo fenômeno em duas linguagens: $\lambda = c/f$ trata a radiação como onda que se propaga, e $E = hf$ a trata como um fluxo de pacotes de energia; a frequência é a ponte entre as duas e o único dado que aparece nas duas contas.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.11) e diga o que cada símbolo significa. A energia do fóton vem da Equação (10.14). O prefixo mega precisa ser desfeito antes de qualquer substituição.

2 Organizar

Dados $f = 100\,\text{MHz}$
$c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\text{m/s}$
$h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J s}$.

Conversões $f = 100\,\text{MHz} = 100 \times 10^{6} = 1{,}0 \times 10^{8}\,\text{Hz}$.

Estratégia isole λ na Equação (10.11); depois aplique a Equação (10.14) com a mesma frequência.

3 Resolver

(a) Da frequência para o comprimento de onda. Isole λ na equação fundamental:

$$\lambda = \frac{c}{f}$$
$$= \frac{3{,}0 \times 10^{8}}{1{,}0 \times 10^{8}}$$

$$\boxed{\lambda = 3{,}0\,\text{m}}$$

(b) Da frequência para a energia do fóton. Multiplique pela

constante de Planck:

$$\begin{aligned} E &= hf \\ &= 6{,}63 \times 10^{-34} \times 1{,}0 \times 10^{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{E = 6{,}6 \times 10^{-26}\ \text{J}}$$

4 Avaliar

Os três metros do item (a) explicam o tamanho das antenas de FM: uma antena irradia bem quando seu comprimento guarda proporção simples com o comprimento de onda, e o dipolo de meia onda mede $\lambda/2$. Daí as hastes de metro e meio nos telhados, e as antenas minúsculas dos celulares, de comprimentos de onda centimétricos.

O item (b) importa mais. Arrancar um elétron de um átomo custa alguns elétron-volts, ou 10^{-18} J; o fóton de FM tem dez milhões de vezes menos. Nenhuma quantidade de ondas de rádio ioniza um átomo, porque a ionização depende da energia de *cada* fóton. É a fronteira entre radiação ionizante, raios X e gama, e não ionizante, micro-ondas e rádio.

10.6.4 Efeito Fotoelétrico

A conclusão do exemplo anterior, de que o que ioniza é a energia de cada fóton e não o total emitido, tem uma consequência que se mede em laboratório e se usa na indústria.

> **DEFINIÇÃO 10.7** • Efeito Fotoelétrico
>
> O **efeito fotoelétrico** é a emissão de elétrons por uma superfície metálica iluminada. Ele só ocorre acima de uma **frequência de corte** f_0, característica do metal, por mais intensa que seja a luz abaixo dela.

O produto hf_0 é a energia mínima para arrancar um elétron da superfície, e chama-se **função trabalho**. Toda energia do fóton que exceder esse mínimo aparece como energia cinética do elétron liberado:

$$E_{c,\text{máx}} = hf - hf_0 \tag{10.15}$$

$E_{c,\text{máx}}$: energia cinética máxima do elétron emitido (J)
h: constante de Planck (J s)
f: frequência da radiação incidente (Hz)

f_0: frequência de corte do metal (Hz)

Dobrar a intensidade de uma luz abaixo da frequência de corte dobra o número de fótons que chegam, mas não a energia de cada um, e nenhum elétron é emitido. Foi essa independência entre intensidade e efeito que a teoria ondulatória não conseguiu explicar, e foi ao explicá-la, em 1905, que Einstein estabeleceu o fóton como pacote indivisível de energia.

NOTA

Sensores ópticos de barreira, que detectam a passagem de peças numa esteira ou o fechamento de uma porta, funcionam por efeito fotoelétrico: a interrupção do feixe corta a corrente e aciona o comando.

CAIU NA PETROBRAS

CESGRANRIO — Petrobras, Operação, 2014
Duas antenas Wi-Fi operam em frequências respectivamente iguais a $2{,}43 \times 10^9$ Hz e $5{,}16 \times 10^9$ Hz.
Qual é, aproximadamente, em cm, a diferença entre os comprimentos das ondas emitidas por essas duas antenas?

(A) 18,2
(B) 12,4
(C) 6,53
(D) 5,81
(E) 2,18

PSPTQ4

10.7 Radiação Térmica

DEFINIÇÃO 10.8 • Radiação Térmica

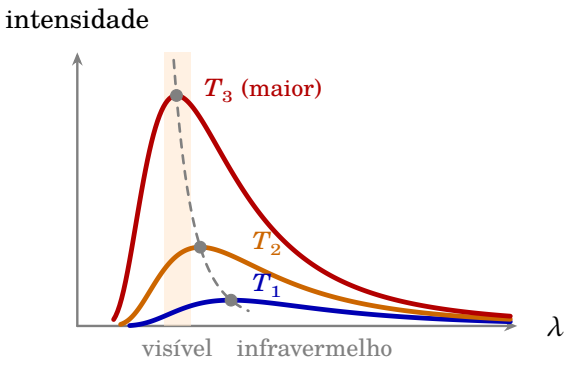
Todo corpo com temperatura $T > 0\,\text{K}$ emite **radiação térmica**, uma emissão contínua de ondas eletromagnéticas devida à agitação térmica das partículas carregadas. A faixa predominante é o infravermelho para temperaturas ambientes, deslocando-se para o visível em temperaturas mais altas.

10.7.1 Lei de Stefan-Boltzmann

Para um corpo real de emissividade ε ($0 \le \varepsilon \le 1$), área A e temperatura absoluta T, a potência irradiada é (ver (6.12) do cap. 6):

$$P = \varepsilon\,\sigma\,A\,T^4 \qquad (\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W/(m}^2\cdot\text{K}^4))$$

Para um **corpo negro** ($\varepsilon = 1$), essa é a emissão máxima possível a cada temperatura.



$T_1 < T_2 < T_3$

Figura 10.17

10.7.2 Lei de Wien (Deslocamento)

DEFINIÇÃO 10.9 • Lei de Wien

O comprimento de onda de pico da emissão do corpo negro é inversamente proporcional à temperatura absoluta: o produto dos dois é uma constante.

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = b \tag{10.16}$$

$\lambda_{\text{máx}}$: comprimento de onda do pico de emissão (m)
T: temperatura absoluta (K)
b: constante de Wien, $2{,}898 \times 10^{-3}$ (m · K)

A termografia infravermelha, feita com câmeras que detectam emissão de calor, é aplicada na inspeção de equipamentos industriais: localiza pontos quentes em painéis elétricos, detecta falhas em isolamentos térmicos, monitora trocadores de calor e identifica vazamentos em dutos. O princípio é a Lei de Stefan-Boltzmann: superfícies mais quentes emitem muito mais radiação.

DICA

A Lei de Wien explica a mudança de cor ao aquecer metal: o pico de emissão se desloca de infravermelho → vermelho → laranja → amarelo → branco-azulado à medida que a temperatura sobe.

EXEMPLO 10.8 • Lei de Stefan-Boltzmann

Uma superfície metálica polida de área $A = 40\,\text{cm}^2$ e emissividade $\varepsilon = 0{,}80$ encontra-se a $T = 527\,^\circ\text{C}$. Calcule a potência total irradiada.

1 Compreender

O assunto é a **lei de Stefan-Boltzmann**.

Objetivo. Obter a potência que a superfície irradia. O que está em jogo é duas conversões que o enunciado esconde: a área veio em

centímetros quadrados e a temperatura em graus Celsius, enquanto a lei exige metros quadrados e kelvin. A de temperatura não é detalhe de arredondamento, porque T entra elevada à quarta potência: usar 527 no lugar de 800 erraria o resultado por um fator maior que cinco.

Antes de seguir, escreva a Equação (6.12) e diga o que cada símbolo significa. A emissividade $\varepsilon = 0{,}80$ diz que a superfície irradia 80% do que um corpo negro irradiaria na mesma temperatura.

2 Organizar

Dados $A = 40\,\text{cm}^2$
$\varepsilon = 0{,}80$
$T = 527\,^\circ\text{C}$
$\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\,\text{W/(m}^2 \cdot \text{K}^4\text{)}$.

Conversões $A = 40\,\text{cm}^2 = 40 \times 10^{-4} = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$
$T = 527 + 273 = 800\,\text{K}$, porque a lei vale para temperatura absoluta.

Estratégia calcule T^4 separadamente, para não perder o expoente no meio da conta, e leve o resultado à Equação (6.12) do cap. 6.

3 Resolver

(a) Quarta potência da temperatura. Escreva a temperatura em notação científica antes de elevar:

$$\begin{aligned} T^4 &= (8{,}0 \times 10^2)^4 \\ &= 8^4 \times 10^8 \\ &= 4\,096 \times 10^8 \end{aligned}$$

$$\boxed{T^4 = 4{,}1 \times 10^{11}\,\text{K}^4}$$

(b) Da lei para a potência. Multiplique os quatro fatores, somando os expoentes de dez:

$$\begin{aligned} P &= \varepsilon\,\sigma\,A\,T^4 \\ &= 0{,}80 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 4{,}0 \times 10^{-3} \times 4{,}1 \times 10^{11} \\ &= 0{,}80 \times 5{,}67 \times 4{,}0 \times 4{,}1 \times 10^{-8-3+11} \\ &= 0{,}80 \times 93 \end{aligned}$$

$$\boxed{P \approx 74\,\text{W}}$$

4 Avaliar

Setenta e quatro watts saindo de quarenta centímetros quadrados equivalem a cerca de 19 kW por metro quadrado, a escala de uma superfície incandescente. À temperatura ambiente, 300 K, a mesma placa emitiria menos de dois watts: uma razão de temperaturas de 2,7 vezes produziu uma razão de potências de mais de cinquenta, e é isso que a quarta potência significa.

Essa sensibilidade torna a termografia infravermelha útil na inspeção industrial. Um mancal cinquenta graus mais quente que os vizinhos emite marcadamente mais radiação e aparece na imagem como um ponto claro antes de qualquer falha audível ou visível. O mesmo raciocínio localiza isolamento degradado em linhas de vapor e conexões frouxas em painéis elétricos.

> **EXEMPLO 10.9** • Lei de Wien – temperatura do Sol
>
> A temperatura da superfície do Sol é aproximadamente $T = 5800\,\text{K}$. Determine: (a) o comprimento de onda de máxima emissão; (b) em que faixa do espectro eletromagnético se encontra esse comprimento de onda.

1 Compreender

O assunto é a **lei de Wien** e, em seguida, a leitura do **espectro eletromagnético**.

Objetivo. Obter em que comprimento de onda o Sol emite mais e a que faixa esse valor pertence. O que está em jogo é a natureza inversa da relação: quanto mais quente o corpo, menor o comprimento de onda do pico.

Antes de seguir, escreva a Equação (10.16) e diga o que cada símbolo significa. A temperatura já vem em kelvin, o que dispensa conversão, mas o resultado sairá em metros e a comparação com a tabela do espectro se faz em nanômetros.

2 Organizar

Dados $T = 5\,800\,\text{K}$
$b = 2{,}898 \times 10^{-3}\,\text{m K}$.

Conversões nenhuma na entrada: o kelvin já é a unidade da lei; o resultado, em metros, vai a nanômetros no fim.

Estratégia isole $\lambda_{\text{máx}}$ na Equação (10.16) e compare o resultado, já convertido para nanômetros, com a tabela do espectro eletromagnético.

3 **Resolver**

(a) Da temperatura para o comprimento de onda do pico. Isole $\lambda_{\text{máx}}$ no produto constante:

$$\begin{aligned}\lambda_{\text{máx}} &= \frac{b}{T} \\ &= \frac{2{,}898 \times 10^{-3}}{5\,800}\end{aligned}$$

$$\lambda_{\text{máx}} = 5{,}0 \times 10^{-7}\ \text{m} = 500\ \text{nm}$$

(b) Da tabela do espectro para a faixa. A luz visível ocupa de 400 a 700 nanômetros, e 500 nm cai no seu interior, na região do verde-azulado:

O pico de emissão do Sol está na faixa da luz visível, na região verde-azulada do espectro.

4 **Avaliar**

Há uma pergunta natural aqui: se o pico está no verde, por que o Sol não parece verde? Porque a lei de Wien localiza o *máximo* da emissão, não a única emissão. O Sol irradia em toda a faixa visível, com intensidades próximas, e a soma dessas cores chega aos olhos como branco.

A mesma lei, lida ao contrário, é um termômetro à distância. Nenhum instrumento mediu os 5 800 K na superfície do Sol: a temperatura foi deduzida do comprimento de onda em que ele emite mais. É o princípio dos pirômetros ópticos, que medem fornos e aço em fusão sem contato, e da câmera termográfica, que faz a versão infravermelha desse raciocínio em cada ponto da imagem.

Referências

Obras que o livro segue

1. PÓLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. (Original: *How to Solve It*, Princeton University Press, 1945.) É dele o roteiro em quatro etapas que o livro chama de Método Pólya CORA.
2. YOUNG, Hugh D.; FREEDMAN, Roger A. **Física**. 14. ed. São Paulo: Pearson, 2015. 4 v.
3. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016. 4 v.
4. TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene. **Física para Cientistas e Engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. 3 v.
5. NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de Física Básica**. 5. ed. São Paulo: Blucher, 2013. 4 v.
6. INMETRO. **Vocabulário Internacional de Metrologia: conceitos fundamentais e gerais e termos associados (VIM 2012)**. Tradução luso-brasileira da 3ª edição do JCGM 200:2012. Duque de Caxias: Inmetro, 2012.

Fontes das epígrafes

As frases que abrem os capítulos foram traduzidas pelo autor a partir das edições abaixo, na ordem dos capítulos.

1. THOMSON, William (Lord Kelvin). Electrical units of measurement. Conferência na Institution of Civil Engineers, Londres, 3 maio 1883. In: **Popular Lectures and Addresses**. Londres: Macmillan, 1889. v. 1.
2. GALILEI, Galileu. **Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze**. Leiden: Elzevir, 1638. Gi-

ornata terza, abertura do tratado *De motu locali*. (Edizione Nazionale, v. VIII, p. 190.)

3. NEWTON, Isaac. **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**. Londres, 1687. Prefácio ao leitor, Cambridge, 8 maio 1686. Em português: **Principia**. Tradução de Trieste Ricci et al. São Paulo: Edusp, 1990.
4. FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. Reading: Addison-Wesley, 1963. v. I, cap. 4, seção 4-1. Em português: **Lições de Física de Feynman**. Porto Alegre: Bookman, 2008.
5. TORRICELLI, Evangelista. Carta a Michelangelo Ricci, Florença, 11 jun. 1644. In: **Opere di Evangelista Torricelli**. Faenza, 1919. v. III. Tradução inglesa em MAGIE, W. F. **A Source Book in Physics**. Nova York: McGraw-Hill, 1935.
6. THOMPSON, Benjamin (Conde Rumford). An experimental enquiry concerning the source of the heat which is excited by friction. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, v. 88, p. 80–102, 1798.
7. CARNOT, Sadi. **Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance**. Paris: Bachelier, 1824. p. 1.
8. MAXWELL, James Clerk. **A Treatise on Electricity and Magnetism**. Oxford: Clarendon Press, 1873. v. I, prefácio, p. ix.
9. AMPÈRE, André-Marie. **Théorie des phénomènes électrodynamiques, uniquement déduite de l'expérience**. Paris: Méquignon-Marvis, 1826. p. 2.
10. EINSTEIN, Albert; INFELD, Leopold. **The Evolution of Physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1938. Cap. III, seção "The reality of the field". Em português: **A Evolução da Física**. Rio de Janeiro: Zahar, 2008.

Índice Remissivo

aceleração, 57
aceleração centrípeta, 143
adição de vetores, 23
alavanca, 128
algarismos significativos, 12
ampère, 348
amperímetro, 397
análise dimensional, 16
armaduras, 336
associação em paralelo, 374
associação em série, 371
atrito, 135
atrito cinético, 135
atrito estático, 135

bobina plana, 410
bombas de calor, 295
braço de alavanca, 125

calibração, 4
calor, 243, 276
calor específico, 243
calor latente, 250
calor sensível, 243
calorimetria, 247
campo elétrico, 313
campo elétrico uniforme, 314
campo magnético, 402
capacidade térmica, 244
capacitância, 336
capacitor, 336
carga elementar, 301
carga elétrica, 301
cargas puntiformes, 306
centro de gravidade, 126
ciclo de Carnot, 288
cinemática, 40
coeficiente de atrito cinético, 135
coeficiente de atrito estático, 135
coeficiente de dilatação aparente, 238
coeficiente de dilatação linear, 234
coeficiente de dilatação superficial, 237
coeficiente de dilatação volumétrica, 237
coeficiente de performance, 295
condução, 255
condutividade térmica, 255
condutor em equilíbrio eletrostático, 331
conservação da carga, 301
constante elástica, 91
convecção, 256
COP, *ver* coeficiente de performance
corpo negro, 427
corrente elétrica, 348
curto-circuito, 379

ddp, *ver* diferença de potencial
decomposição de vetores, 33
densidade, 190
deslocamento, 42

diagrama de corpo livre, 113
dielétrico, 336
diferença de potencial, 321
dilatação aparente, 238
dilatação linear, 234
dinâmica, 85
diodo, 356
distância percorrida, 42
divisor de corrente, 375
divisor de tensão, 372

efeito de carga, 398
efeito fotoelétrico, 426
efeito Joule, 365
efeito Venturi, 218
eletrização por atrito, 301
eletrização por contato, 301
eletrização por indução, 301
eletrodinâmica, 346
eletromagnetismo, 401
elétrons, 300
eletrostática, 299
emissividade, 256
empuxo, 206
energia, 150
energia cinética, 158
energia interna, 243, 276
energia mecânica, 169
energia potencial elástica, 166
energia potencial elétrica, 320
energia potencial gravitacional, 164
entropia, 283
equação de estado do gás ideal, 264
equilíbrio, 119
equilíbrio estático, 126
equilíbrio térmico, 226
escoamento laminar, 212
escoamento turbulento, 212
espectro eletromagnético, 422

fcem, *ver* força contra-eletromotriz
fem, *ver* força eletromotriz
fio ideal, 90
fluido ideal, 217
fluido incompressível, 213
fluxo magnético, 415
força, 86
força centrípeta, 144
força contra-eletromotriz, 387
força elástica, 91
força eletromotriz, 382
força não conservativa, 164
força resultante, 98, 159
forças conservativas, 164
frequência de corte, 426
função trabalho, 426

galvanômetro, 397
gás ideal, 263
gerador, 382

hidrodinâmica, 188
hidrostática, 188

índice de refração, 424
inércia, 93

lançamento horizontal, 74
lançamento oblíquo, 74
lançamento vertical, 68
Lei de Charles, *ver* transformação isobárica
Lei de Gay-Lussac, *ver* transformação isocórica
leis de Newton, 85
limite elástico, 91
linha de corrente, 217
linhas de campo, 314
linhas de campo magnético, 402

malha (circuito), 390
máquina térmica, 285
massa, 103
massa específica, 190
mecânica dos fluidos, 188
medidor nuclear de nível, 423
métodos energéticos, 150

metrologia, 2, 3
movimento, 41
movimento retilíneo uniforme, 49
movimento retilíneo uniformemente variado, 49
mudança de fase, 250

nêutrons, 300
newton, 86
nó (circuito), 390
notação científica, 9

ohm, 353
ôhmico, 354
ondas eletromagnéticas, 422
ordem de grandeza, 11

par ação-reação, 109
permissividade relativa, 337
peso, 103
peso aparente, 106
peso específico, 190
poder das pontas, 333
polia ideal, 90
ponte de Wheatstone, 395
pontos fixos, 227, 231
potência, 179
potência elétrica, 361
potência instantânea, 180
potência média, 180
potencial elétrico, 321
prensa hidráulica, 201
pressão, 191
pressão absoluta, 195
pressão manométrica, 195
primeira Lei da Termodinâmica, 277
primeira Lei de Newton, 92
princípio da independência dos movimentos, 74
produto escalar, 37
produto vetorial, 38
proteção catódica, 333
prótons, 300

queda livre, 65
quilowatt-hora, 367

radiação, 256
radiação térmica, 427
ramo (circuito), 390
rapidez, *ver* velocidade escalar média
receptor, 387
referenciais inerciais, 93
referencial, 41
refrigeradores, 295
regime permanente, 212
rendimento, 181, 286
repouso, 41
resistência elétrica, 353
resistência equivalente, 371
resistência interna, 382
resistividade, 356

segunda Lei da Termodinâmica, 283
segunda Lei de Newton, 98
sentido convencional da corrente, 348
Sistema Internacional de Unidades (SI), 6
Sistema Métrico Decimal, 6
solenoide, 411
superfícies equipotenciais, 322

temperatura, 226
tensão elétrica, *ver* diferença de potencial
teorema de Torricelli, 222
teoria cinética dos gases, 268
terceira Lei de Newton, 109
termodinâmica, 262
termologia, 225
torque, 125
trabalho, 151, 276
tração, 90
trajetória, 42
transformação adiabática, 270
transformação isobárica, 269
transformação isocórica, 270

transformação isotérmica, 268
transformador, 420
tubo de Pitot, 218

valor eficaz, 369
valor médio, 353
vantagem mecânica, 201
vazão mássica, 213
vazão volumétrica, 213
velocidade escalar média, 44
velocidade instantânea, 45
velocidade média, 45
voltagem, *ver* diferença de potencial
voltímetro, 397